

Feuille de TD 3 : Convergence des suites et opérations dans \mathcal{D}'

Exercice 1

Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Exercice 2

Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{inx} \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Exercice 3

On note T_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution δ_0 . *Indication : on pourra se servir de l'identité $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$*

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et telle que la suite de distributions associées $(T_{u_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ vers une distribution T .

1. Montrer qu'il existe $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $T = T_u$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers u .

Exercice 5

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :

$$F_N : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} \end{array}$$

La fonction $F_N \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On note T_N la distribution associée à F_N .

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin \frac{t}{2}}.$$

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin \frac{t}{2}} \varphi(t) dt,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^M \varphi(t + 2k\pi)$.

3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞ , montrer que la suite $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}$.

Exercice 6

Soit H la fonction indicatrice de \mathbb{R}_+ .

1. Montrer que $H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $(\log|x|)' = \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = \text{Pf} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Exercice 7

1. Déterminer les distributions u sur \mathbb{R} vérifiant $u' = 0$.
2. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tels que $u' = f$. Montrer que $u \in C^1(\mathbb{R})$ et que $u' = f$ au sens usuel.
3. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Montrer que F est continue et que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $F' = f$.

Exercice 8

Soit $I =]a, b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I . On se propose de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' + fT = g$ au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I .
2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + Se^{-F}$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Exercice 9

1. Montrer que $xvp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$.
 - a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(0) \neq 0$. Démontrer qu'il existe une constante C_φ telle que, pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur le support de φ , $C_\varphi = \langle T, \phi \rangle$.
 - b. Montrer que si, φ et $\tilde{\varphi}$ sont deux fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\varphi(0) \neq 0$ et $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$, alors $C_\varphi = C_{\tilde{\varphi}}$.
 - c. En déduire toutes les solutions de l'équation $xT = 0$.
3. Résoudre l'équation $xT = 1$.
4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $(\sin x)T = 0$ si et seulement s'il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes telle que,

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{n\pi}.$$

Exercice 10

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.
2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$

Exercice 11

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur \mathbb{R} , l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.
 - a. Calculer T_1 et T_2 .
 - b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.
 - c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans \mathbb{C} . Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.
 - d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.
3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$