Institut Galilée **2018-2019**
Filière M1
Distributions

Feuille de TD 4 : Produit de convolution et solutions élémentaires

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\delta'_a \otimes \delta'_b$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Calculer $\delta'_0 \star \delta'_0$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, à support compact, telle que $E \star T = T^{(k)}$.

4. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T \star S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X^k T) \star (X^{n-k} S).$$

Exercice 2

On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}); \operatorname{supp} T \subset [0, +\infty[\}$.

1. Soient $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Montrer que $T \star S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

2. On dit que $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est inversible, s'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T \star S = \delta_0$. On note $S = T^{-1}$.

a. Montrer que δ'_0 est inversible et calculer son inverse.

b. Montrer que, si $T \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible.

3. Soit $K \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, l'ensemble des fonctions bornées presque partout sur tout compact de $\mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $K_n = K \star \cdots \star K$, où le produit de convolution contient n facteurs tous égaux à K. Par convention on suppose que $K_0 = \delta_0$, la distribution de Dirac en 0.

a. Montrer que pour tout $a > 0$, tout $x \in [0, a]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|K(x)| \leq M(a)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{où } M(a) = \sup_{x \in [0,a]} |K(x)|.$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence sur $n \geq 1$.

b. Montrer que la série $\sum (-1)^n K_n$ converge dans $\mathcal{D}'_+$. Il n'est pas demandé de déterminer sa somme.

c. Justifier que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n K_n(x)$ est bornée sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$.

d. Montrer que :

$$(\delta_0 + K) \star \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n K_n \right) = \delta_0.$$

4. Soit f et g deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ telles que pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\forall x \geq 0, \; f(x) + \int_0^x \mathrm{e}^{\lambda(x-y)} f(y) \mathrm{d}y = g(x). \qquad (1)$$

a. Montrer que (1) est équivalente à l'équation d'inconnue f dans $\mathcal{D}'_+$,

$$(\delta_0 + H\mathrm{e}^{\lambda \cdot}) \star f = g$$

où H est la distribution de Heaviside associée à la fonction caractéristique de $[0, +\infty[$.

b. En déduire que (1) admet toujours une solution f dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 3 - Équation de Laplace

Soit $d \geq 1$. On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par la fonction localement intégrable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \; E(x) = \begin{cases} x \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) & \text{si } d = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{si } d = 2 \\ -\frac{1}{(d-2)\sigma(\mathbb{S}^{d-1})} \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si } d \geq 3 \end{cases},$$

où $\sigma(\mathbb{S}^{d-1})$ désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. Pour $d = 1$, vérifier que $E'' = \delta_0$.

2. On suppose dans la suite $d \geq 2$. Soit f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $F \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, F(x) = f(|x|)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \; \Delta F(x) = f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} f'(|x|).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}^*_+$ l'équation différentielle :

$$f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = 0.$$

4. Soit $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction localement intégrable donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \log|x| & \text{si} \quad d = 2 \\ \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si} \quad d \geq 3 \end{array} \right. .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit Ω_ε l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)$. Soit enfin $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En appliquant la formule de Green à F et φ sur l'ouvert Ω_ε, puis en faisant tendre ε vers 0, calculer $< \Delta F, \varphi >$.

5. En déduire que $\Delta E = \delta_0$, pour tout $d \geq 2$.

6. On admet le théorème de Liouville (version faible) : *Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telle que $\Delta u = 0$. Si $u(x)$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini alors u est nulle.*

a. Soit $\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ une distribution à support compact. Montrer que l'équation $-\Delta V = \rho$ admet une unique solution qui tend vers 0 à l'infini.

b. Calculer l'expression de cette solution pour $\rho = \delta_0$ (charge unique à l'origine) et pour $\rho = \delta'_{x_0}$ avec $x_0 \neq 0$ (cas du dipôle).

Exercice 4 - Équation des ondes 1D

On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction localement intégrable :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2} & \text{si} & t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} & t - |x| \leq 0 \end{array} \right. .$$

1. Calculer $(\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.

3. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de u?

Exercice 5

On considère un ouvert Ω dont le bord $\Gamma = \partial\Omega$ admet un paramétrage $t \to \gamma(t)$ avec $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{C})$ tel que $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais et γ soit injective sur $[0,1[$. On traitera également des situations où $\Gamma = \partial\Omega$ est une union disjointe de telles courbes paramétrées

1. Vérifier que pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C};\mathbb{C})$, l'intégrale de contour $\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ ne dépend pas du paramétrage choisi une fois le sens de parcours de Γ fixé. On note $\int_\Gamma f(z)\, dz$ l'intégrale de contour donné par les paramétrages pour lesquels $i\gamma'(t)$ pointe vers l'intérieur de Ω.

2. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, on a

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = i \int_\Omega (\partial_x + i\partial_y)(f)(x+iy)\ dxdy.$$

en posant $z = x+iy$. Indication : Utiliser les champs de vecteurs, $X_1 = (f_I, f_R)$ et $X_2 = (-f_R, f_I)$ en posant $f = f_R + i f_I$.

3. Sous les mêmes hypothèses que précédemment en déduire que pour tout $w \in \Omega$,

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(f)(x+iy)\,\frac{dxdy}{x+iy-w}.$$

4. En déduire pour $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et f holomorphe dans Ω la formule de Cauchy

$$\forall w \in \Omega,\ f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\, dz\,.$$

5. On rappelle qu'une solution élémentaire d'un opérateur différentiel à coefficients constants P est une distribution E telle que $PE = \delta_0$.

Montrer qu'une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ sur $\mathbb{C}_z \sim \mathbb{R}^2_{xy}$ est $\frac{1}{\pi z}$.