

Exercice 1 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, m e^{-m|x|} \leq g(x).$$

Comme les $x \mapsto m e^{-m|x|}$ sont mesurables et dominées par une fonction intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} m e^{-m|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{m \rightarrow +\infty} m e^{-m|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \forall m \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} m e^{-m|x|} dx &= \int_{-\infty}^0 m e^{mx} dx + \int_0^{+\infty} m e^{-mx} dx \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Contradiction.

Exercice 2

Soit $\mathbb{1}_{[0, \sqrt{m}]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \sqrt{m}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors soit pour $m > 0$,

$$u_m = \int_0^{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{t^2}{m}\right)^m dt = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0, \sqrt{m}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{m}\right)^m dt$$

Posons $f_m: t \mapsto \mathbb{1}_{[0, \sqrt{m}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{m}\right)^m$. Alors: $\forall t \in \mathbb{R}, f_m(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^{-t^2}$

Alors: $\forall t \in \mathbb{R}, f_m(t) \leq e^{-t^2}$ qui est dans $L^1(\mathbb{R})$ et indépendante de m .

Par le TCD,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \int_{\mathbb{R}} \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 3:

1. On étudie les variations de $f: \overset{[0,1] \rightarrow \mathbb{R}}{u \mapsto u + \log(1-u)}$.

f est C^∞ sur $[0,1]$ et $\forall u \in [0,1], f'(u) = 1 - \frac{1}{1-u} \leq 0$.

Donc f est $\searrow$ et $f(0) = 0$. Donc: $\forall u \in [0,1], f(u) \leq 0$.

2. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On applique 1. avec $u = \frac{y^2}{\lambda^3}$ et, lorsque

$|y| \leq \lambda^{3/2}$ (i.e. $u \in [0,1]$), on a:

$$\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right) \leq -y^2 \quad \left(= -\frac{y^2}{\lambda^3} \times \lambda^3\right).$$

(*) Alors: $\exp\left(\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) |\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)| \leq e^{-y^2} \sup_{z \in \mathbb{R}} |\varphi(z)| / \int_{\mathbb{R}} \exp(-z^2) dz$
et int sur $\mathbb{R}$ et int de λ .

Donc par le théorème de convergence dominée:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \exp\left(\lambda^3 \log\left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3}\right)\right) \varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(0) e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi} \varphi(0).$$

(*) En effet, pour λ assez grand, (*) est vérifiée. $\exists R > 0$ tq si $|\varphi(y/\lambda)| \neq 0$ on a $|y| \leq R\lambda < \lambda^{3/2}$ (si $\sqrt{\lambda} > R$).

Exercice 6:

1. Ok (comp du plus gd ouvert où u est nulle)

2. $\Rightarrow$ Si $x \in \text{supp } u$

$$x \notin \text{supp } u \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall y \in B(x, \varepsilon), u(y) = 0$$

$$\text{Donc } x \in \text{supp } u \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y \in B(x, \varepsilon), u(y) \neq 0.$$

Pon C^0 , $u(y)$ ne s'annule pas sur un voisinage de y (pour $\varepsilon > 0$)

Puis soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 en y et ≥ 0 sur $B(y, \varepsilon)$

$$\text{Alors } \int u(t) \varphi(t) dt = \int_{B(y, \varepsilon)} u(t) \varphi(t) dt = \int_{B(y, \varepsilon)} u(t) \varphi(t) dt \neq 0,$$

$$\Leftrightarrow \text{Alors soit } \varepsilon > 0, \text{ Puisque } \exists \varphi \in C_c^\infty(B(x, \varepsilon)), \int u(t) \varphi(t) dt \neq 0,$$

$$\text{on a nécessairement } \exists t \in B(x, \varepsilon), u(t) \varphi(t) \neq 0.$$

$$\text{et en particulier } u(t) \neq 0. \text{ Donc: } \forall \varepsilon > 0, \exists t \in B(x, \varepsilon), u(t) \neq 0. \text{ Donc } x \in \text{supp } u.$$

3. La C^0 est assurée par le théorème de Weierstrass.

Soient A, B deux réels tels que $\text{supp } f \subset B(0, A)$ et $\text{supp } g \subset B(0, B)$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| > A+B$.

Comme on peut supposer que y est tq $x-y \in \text{supp } f \subset B(0, A)$

$$\text{on a } |x-y| \leq A. \text{ Alors: } |y| = |x - (x-y)| \geq |x| - |x-y| > A+B-A = B$$

$$\text{D'où } g(y) = 0 \text{ et } f * g(x) = 0.$$

$$\text{Donc } \text{supp}(f * g) \subset B(0, A+B). \text{ et } f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

On veut montrer que si $x \in (\text{supp } f + \text{supp } g)^c$ alors

$$x \in \text{supp}(f * g)^c. \text{ D'où l'inclusion voulue}$$

Exercice 7:

1. Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$, $\text{supp } f \subset [a, b]$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $y \mapsto f(x-y)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. Donc Tf est bien définie. De plus comme f est continue, $x \mapsto f(x-y)$ l'est aussi et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, 1], |f(x-y)| \leq M \mathbb{1}_{[a-1, b+1]}(y)$$

On $y \mapsto M \mathbb{1}_{[a-1, b+1]}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ et cette majoration est uniforme en x . Par le théorème de continuité sous le signe intégral, Tf est continue.

2. Comme $C_0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \int_0^1 |f_n(x-y) - f(x-y)| dy \leq \|f_n - f\|_1.$$

$$\text{Et: } \sup_{x \in \mathbb{R}} |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc (Tf_n) converge uniformément vers Tf sur $\mathbb{R}$. Par a., chaque Tf_n est continue, donc Tf l'est aussi.

3. On a: $Tf = f * \mathbb{1}_{[0, 1]}$. Si par l'absurde, il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que: $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), f * u = f$, alors :

$Tu = u * \mathbb{1}_{[0, 1]} = \mathbb{1}_{[0, 1]}$. Mais, par 2., Tu est continue sur $\mathbb{R}$ alors que $\mathbb{1}_{[0, 1]}$ ne l'est pas. Contradiction.

Exercice 12

1. Pour $k \leq m$ et $x \in \mathbb{R}$, pour la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned} f_m^{(k)}(x) &= \frac{c_m}{m!} \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{d^{k-p}}{dx^{k-p}} (\varphi(t_m x)) \frac{d^p}{dx^p} (x^m) \\ \text{En particulier, si } |t_m x| \geq 2, \varphi_m^{(k)}(x) &= 0. \\ \text{On peut donc supposer que } |t_m x| < 2 \\ \text{soit } |x| < \frac{2}{|t_m|}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c_m}{m!} \sum_{p=0}^k C_k^p t_m^{k-p} \varphi^{(k-p)}(t_m x) p! x^{m-p} \\ &= c_m \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{x^{m-p}}{(m-p)!} t_m^{k-p} \varphi^{(k-p)}(t_m x) \end{aligned}$$

Et pour $k \geq m+1$: $f_m^{(k)}(x) = \frac{c_m}{m!} \sum_{p=0}^m C_m^p \frac{x^{m-p}}{(m-p)!} t_m^{k-p} \varphi^{(m-p)}(t_m x)$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq \frac{2}{|t_m|}$ et $k \leq m$:

$$\begin{aligned} |f_m^{(k)}(x)| &\leq |c_m| \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \frac{1}{t_m^{k-p}} |\varphi^{(k-p)}(t_m x)| \\ &= |c_m| \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \frac{1}{t_m^{k-p}} |\varphi^{(k-p)}(t_m x)| \\ &\leq \frac{|c_m|}{t_m^{m-k}} A_m \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \leq \frac{|c_m|}{t_m^{m-k}} A_m \left(\sum_{p=0}^m C_m^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \right) \\ &\quad \text{car } m \geq k \text{ et } C_m^p \geq C_k^p \text{ si } m \geq k \end{aligned}$$

5. Soit $f \in C^\infty \text{ sur }]0, +\infty[$

Soit $c_n = f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $g \in C^\infty$

sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f \text{ en } \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = c_n = f^{(n)}(0)$$

Donc on peut considérer

$$h \text{ tq } h|_{]-\infty, 0]} = g|_{]-\infty, 0]}$$

$$\text{et } h|_{]0, +\infty[} = f$$

Alors h prolonge f en une fonction de classe

C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3. On a :

$$(x) \quad \frac{|c_m|}{t_m^{m-k}} A_m M_m \leq \frac{1}{2^m} \Rightarrow |f_m^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^m}$$

Si $t_m > 1$, il suffit de prendre $t_m = |c_m| M_m A_m 2^m + 1$ pour avoir (x).

4. Comme les séries $\sum f_m^{(k)}$ CUN sur $\mathbb{R}$ vers $f^{(k)}$, on a :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m \geq 0} f_m^{(k)}(x) = \sum_{m \geq 0} c_m \left(\sum_{p=0}^k C_k^p \frac{x^{m-p}}{(m-p)!} t_m^{k-p} \varphi^{(k-p)}(t_m x) \right)$$

$$\text{En } x=0 : f^{(k)}(0) = \sum_{m \geq 0} c_m \left(\sum_{p=0}^k C_k^p t_m^{k-p} \times 1 \times \frac{0^{m-p}}{(m-p)!} \right)$$

$$= c_k \quad (m=k, p=k \text{ est le seul terme non nul})$$

Donc, pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, il existe une fonction $f \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0) = c_n$.