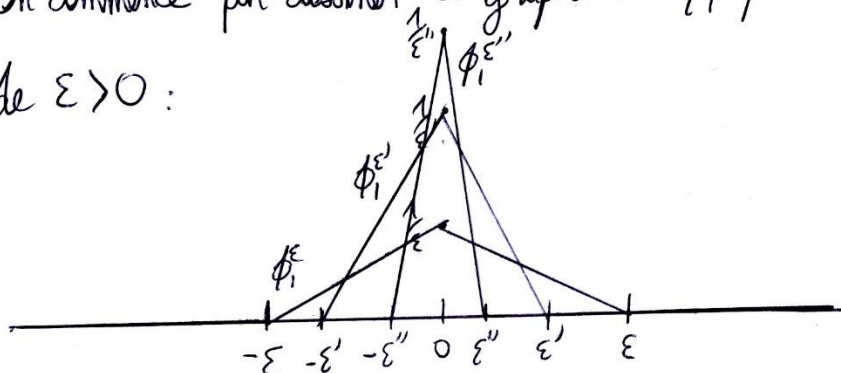


Exercice 1 - Approximation du Dirac

On commence par dessiner le graphe de ϕ_1^ε pour différentes valeurs de $\varepsilon > 0$:



1. On a: $\forall x \neq 0, \exists \varepsilon > 0, \varepsilon < |x|$
 D'où $\forall x, |x| > 0, \exists \varepsilon > 0, \phi_1^\varepsilon(x) = 0$.

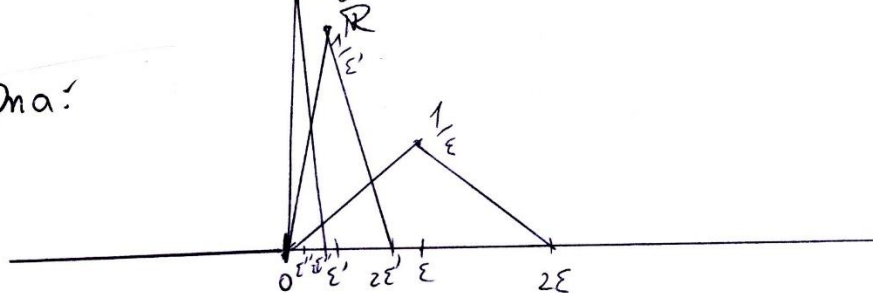
Donc si $x \neq 0, \phi_1^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$.

Si $x = 0, \phi_1^\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$.

Donc $\phi_1^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0 \\ +\infty & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

2. L'intégrale sur $\mathbb{R}$ de ϕ_1^ε est l'aire du triangle qui vaut 1.
 Donc: $\forall \varepsilon > 0, \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x) dx = 1 \rightarrow$ candidat au Dirac

3. On a:



On a: $\phi_2^\varepsilon(0) = \phi_2^\varepsilon(-\varepsilon) = 0$.

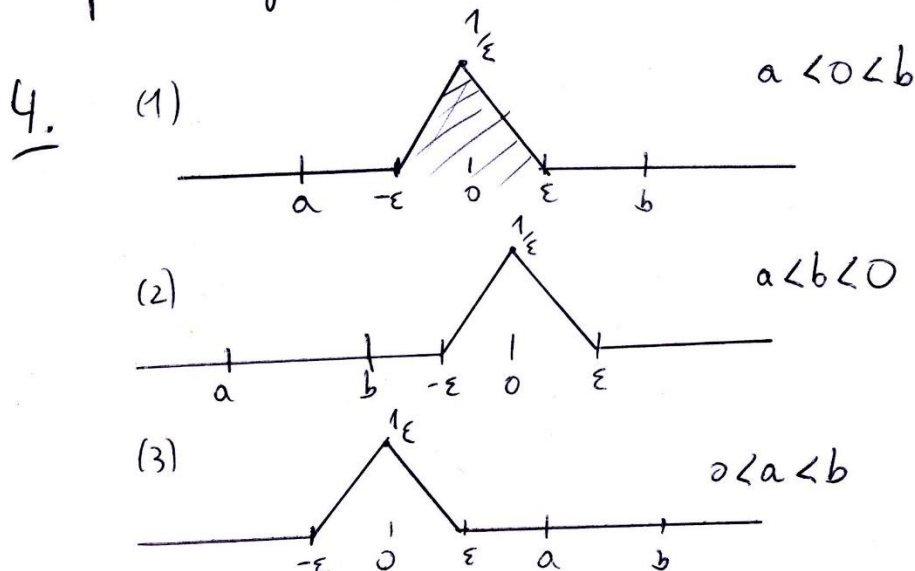
De plus: $\forall x > 0, \exists \varepsilon > 0, x > 2\varepsilon$ et donc pour ε assez petit, $\phi_2^\varepsilon(x) = 0$.

Enfin, $\forall x < 0, \forall \varepsilon > 0, \phi_2^\varepsilon(x) = 0$.

Donc $\phi_2^\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

On: $\forall \varepsilon > 0, \int_{\mathbb{R}} \phi_2^\varepsilon(x) dx = 1.$

Ici, avec l'intégrale et la limite simple on ne voit même pas la singularité en 0.



Cas (1) $\exists \varepsilon(a,b) > 0$ assez petit tel que $a < -\varepsilon(a,b) < 0 < \varepsilon(a,b) < b$.

Alors: $\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x) dx = 1.$ Alors: $I_1(a,b) = 1.$

Cas (2) $\exists \varepsilon(a,b) > 0$ tel que $a < b < -\varepsilon(a,b) < 0$

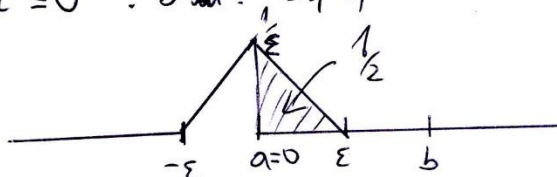
D'où: $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < \varepsilon(a,b), \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x) dx = \int_a^b 0 dx = 0.$

Alors $I_1(a,b) = 0$

Cas (3): $\exists \varepsilon(a,b) > 0$ tel que $0 < \varepsilon(a,b) < a < b$ et $\forall \varepsilon < \varepsilon(a,b),$

$\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x) dx = 0$. D'où: $I_1(a,b) = 0.$

Enfin, si $a=0$ ou $b=0$:



$\forall \varepsilon > 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x) dx = \frac{1}{2}$

Donc:
$$I_1(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in]a,b[\\ 0 & \text{si } 0 \notin [a,b] \\ \frac{1}{2} & \text{si } a=0 \text{ ou } b=0 \end{cases}$$

Donc $I_1(a,b)$ mesure l'appartenance ou non de 0 à $[a,b]$.

5. On a: $I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x) \phi(x) dx$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} (\varepsilon - |x|) \phi(x) dx$$

$$\begin{matrix} x = \varepsilon t \\ dx = \varepsilon dt \end{matrix} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon - |x|) \phi(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (1 - |t|) \phi(\varepsilon t) dt$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{TCV}} \int_{-1}^1 (1 - |t|) \phi(0) dt = \phi(0)$$

Donc: $I_1^\varepsilon(\phi) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \phi(0)$

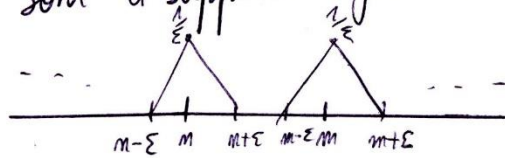
6. On a: $\forall \varepsilon > 0, |I_1^\varepsilon(\phi)| \leq \int_{-1}^1 (1 - |t|) |\phi(\varepsilon t)| dt$

$$\leq 1 \times \max_{x \in [-1, 1]} |\phi(x)|$$

$$\leq 1 \times \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|.$$

Exercice 2 - Le peigne de Dirac

1. Pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$, pour $m \neq m'$, $x \mapsto \phi_1^\varepsilon(x-m)$ et $x \mapsto \phi_1^\varepsilon(x-m')$ sont à supports disjoints.



De plus, chaque fonction $x \mapsto \phi_1^\varepsilon(x-m) \in L^1(\mathbb{R})$.

Donc $\Psi^\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} \Psi^\varepsilon(x) \phi(x) dx &= \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_1^\varepsilon(x-p) \right) \phi(x) dx \\ &= \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} \left(\sum_{p=m}^m \phi_1^\varepsilon(x-p) \right) \phi(x) dx \\ &= \sum_{p=m}^m \int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon} \phi_1^\varepsilon(x-p) \phi(x) dx \\ &\stackrel{x=p+\varepsilon t}{\substack{\text{sur } [p-\varepsilon, p+\varepsilon]}} \Rightarrow \sum_{p=m}^m \int_{-1}^1 (1-|t|) \phi(p+\varepsilon t) dt \end{aligned}$$

Or, comme ϕ est continue (donc bornée sur $[-1,1]$), on a par TCD :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 (1-|t|) \phi(p+\varepsilon t) dt = \phi(p) \int_{-1}^1 (1-|t|) dt = \phi(p)$$

$$\text{D'où : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} \Psi^\varepsilon(x) \phi(x) dx = \sum_{p=m}^m \phi(p)$$

3. Pour pouvoir faire tendre m vers $-\infty$ et m vers $+\infty$, il faut que $\sum |\phi(p)| < +\infty$. Donc il faut que ϕ décroisse suffisamment à l'infini. Ce critère est automatiquement vérifié si ϕ est à support compact.

Exercice 3 :

1

Densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\chi \equiv 1$ sur $B(0,1)$, nulle hors de $B(0,2)$ et $0 \leq \chi \leq 1$.

Pour $m \geq 1$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \chi_m(x) = \chi\left(\frac{x}{m}\right).$$

$$\text{Alors } \forall x \in B(0,m), \chi_m(x) = 1$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus B(0,2m), \chi_m(x) = 0.$$

Soit $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^d)$. Posons, pour $m \geq 1$, $f_m = f \chi_m$.

Alors $f_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrons que

$$f_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f.$$

Il suffit de montrer que : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\rho_{\alpha\beta}(f_m - f) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Or : } \rho_{\alpha\beta}(f_m - f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta (f_m - f)(x)|$$

Or pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|x^\alpha \partial^\beta (f_m - f)(x)| = |x^\alpha \partial^\beta (\chi_m - 1)f(x)|$$

On peut Leibnitz :

$$\begin{aligned} \partial^\beta (\chi_m - 1)f &= \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma (\chi_m - 1) \partial^{\beta-\gamma} f \\ &= (\chi_m - 1) \partial^\beta f + \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \neq \beta}} \binom{\beta}{\gamma} \partial^\gamma (\chi_m - 1) \partial^{\beta-\gamma} f \\ &\equiv 0 \text{ sur } (\mathbb{R}^d \setminus B(0,2m)) \cup B(0,m) \end{aligned}$$

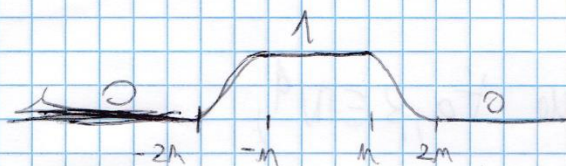
②

On a autre :

$$\begin{aligned} \delta \neq 0, \quad \partial^\delta (\chi_m - 1) &= \partial^\delta \chi_m = \partial^\delta \left(\chi \left(\frac{\cdot}{m} \right) \right) \\ &= \frac{1}{m^{|\delta|}} \partial^\delta \chi \left(\frac{\cdot}{m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D'_{\text{au}} : \quad \left| \sum_{\substack{\delta \leq \beta \\ \delta \neq 0}} \binom{\beta}{\delta} \partial^\delta (\chi_m - 1) \partial^{\beta-\delta} f(x) \right| &= \left| \sum_{\substack{\delta \leq \beta \\ \delta \neq 0}} \binom{\beta}{\delta} \frac{1}{m^{|\delta|}} \partial^\delta \chi \left(\frac{x}{m} \right) \partial^{\beta-\delta} f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{m} \sum_{\substack{\delta \leq \beta \\ \delta \neq 0}} \binom{\beta}{\delta} \frac{1}{m^{|\delta|-1}} \left| \partial^\delta \chi \left(\frac{x}{m} \right) \right| \left| \partial^{\beta-\delta} f(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{m} \left(\sum_{\substack{\delta \leq \beta \\ \delta \neq 0}} \binom{\beta}{\delta} \frac{1}{m^{|\delta|-1}} \right) \max_{\substack{\delta \leq \beta \\ \delta \neq 0}} \|\partial^\delta \chi\|_\infty \|\partial^{\beta-\delta} f\|_\infty \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{2^{|\beta|}} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\leq 1} \end{aligned}$$

$$D'_{\text{au}} : \quad p_{\alpha\beta}(\chi_m - f) \leq \max_{\|x\| \geq m} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| + \frac{1}{m} 2^{|\beta|} \max_{\substack{\delta \leq \beta \\ \delta \neq 0}} \|\partial^\delta \chi\|_\infty \|\partial^{\alpha+\beta-\delta} f\|_\infty$$



$$\leq \max_{\|x\| \geq m} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| + \frac{1}{m} 2^{|\beta|} \underbrace{C_{\alpha\beta}}_{\downarrow \text{norme } 0!} \max_{\delta \leq \beta} p_{\alpha+\beta-\delta}(f)$$

$$\leq \max_{\|x\| \geq m} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| + \frac{1}{m} 2^{|\beta|} C_{\alpha\beta} \max_{\delta \leq \beta} p_{\alpha+\beta-\delta}(f)$$

$$\forall x \in [-m, m], \quad \chi_m(x) - 1 \leq 0.$$

$\rightarrow 0$
 ~~$m \rightarrow \infty$~~

Exercice 4 :

a. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$.
L'application $T: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx \right| = \left| \int_a^b \varphi(x^2) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x^2)| dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_{x^2 \in [a, b]} dx$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre exactement 0. Déterminons son support.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$. Alors $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx = 0$ car $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^*$ implique que $\varphi(y) = 0$ pour $y \geq 0$.

Donc $(\text{supp } T)^c \supset \mathbb{R}_-^*$ et $\text{supp } T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta > 0$ et soit $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Soit φ une fonction "pic", $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. En particulier, φ est strictement positive sur $V_{\delta'} =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$ avec $0 < \delta' < \delta$ et $V_{\delta'} \subset V_\delta$, $x_0 \in V_{\delta'}$. On a de plus :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx = \int_{x^2 \in V_\delta} \varphi(x^2) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(x^2) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(y) dy \geq \int_{x_0 - \delta'}^{x_0 + \delta'} \varphi(y) dy > 0$$

Donc T est non nulle au voisinage de x_0 . Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, on a $\mathbb{R}_+ \subset \text{supp } T$. Donc : $\text{supp } T = \mathbb{R}_+$.

b. L'application $T: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx \right| = \left| \underbrace{[\varphi(x) e^{x^2}]_a^b}_{=0 \text{ car } \varphi(a)=\varphi(b)=0} - \int_a^b \varphi(x) \cdot 2x e^{x^2} dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |\varphi(x)| |2x e^{x^2}| dx \leq \|\varphi\|_\infty (e^{b^2} - e^{a^2}) = C \|\varphi\|_\infty.$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0. Calculons le support de T . Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\delta > 0$ tel que $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Par ailleurs, $f: x \mapsto 2x e^{x^2}$ a un signe constant sur V_δ , disons strictement positif. Donc:

$$\exists \delta' < \delta, \quad \langle T, \varphi \rangle \geq \int_{V_{\delta'}} \varphi(x) f(x) dx > 0. \quad (\text{cf a.})$$

Donc $\mathbb{R}^* \subset \text{supp } T$ et comme $\text{supp } T$ est fermé, $\mathbb{R} \subset \text{supp } T$.

Donc $\text{supp } T = \mathbb{R}$.

Exercice 5 :

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. L'application $T: \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors :

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx \right| = \left| \int_{[a, b] \cap \mathbb{R}^+} \varphi'(x) \log x dx \right| \leq \|\varphi'\|_\infty \int_{[a, b] \cap \mathbb{R}^+} \log x dx$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

Constante car $x \mapsto \log x$ est intégrable en 0

2. a. Avec φ_m comme dans l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi_m \rangle| &= \left| \int_{\frac{1}{2m}}^2 \varphi'_m(x) \log x dx \right| = \left| \underbrace{[\varphi_m(x) \log x]_{\frac{1}{2m}}^2}_{=0} - \int_{\frac{1}{2m}}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \right| \\ &\geq \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{dx}{x} = \log m. \end{aligned}$$

Donc : $\forall m \geq 1, |\langle T, \varphi_m \rangle| \geq \log m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$

- b. Or, $\|\varphi_m\|_\infty = 1$ pour tout $m \geq 1$. Donc, avec $[a, b] = [0, 2]$, il existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tel que pour tout $C > 0$ et tout $m \geq 1$, il existe $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi_m \subset [0, 2]$ et : $|\langle T, \varphi_m \rangle| \geq C \|\varphi_m\|_\infty = C$. (car $\log m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$).

Donc T n'est pas d'ordre 0, elle est donc d'ordre 1.

3. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^*$, alors :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log x dx = 0 \quad \text{car } \varphi \equiv 0 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Donc $\text{supp } T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Alors :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi'(x) \log x dx = - \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx < 0. \text{ Donc } \langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

Donc $x_0 \in \text{supp } T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \text{supp } T$. Donc $\text{supp } T = \mathbb{R}_+$.

Exercice 6 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$.

1. On a: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt$. On pose $t = xu$.

Alors: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(xu) du$.

Posons $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $[0,1]$ est compact, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x \psi(x)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

$$\begin{aligned} \text{On a: } \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) dx \\ &= \underbrace{\int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{a > |x| > \varepsilon} \psi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a > |x| > 0} \psi(x) dx \text{ car } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Donc la limite existe et vaut $\int_{a > |x| > 0} \psi(x) dx$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$. Alors: $\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et: $\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \left| \int_{-a}^a \psi(x) dx \right| = \left| \int_{-a}^a \left(\int_0^1 \varphi'(xu) du \right) dx \right|$

$$\leq \|\varphi'\|_\infty \left| \int_{-a}^a \left(\int_0^1 du \right) dx \right| = 2a \|\varphi'\|_\infty.$$

Donc $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre au plus 1.

4. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$ assez grand pour que $\varepsilon \geq \frac{1}{2m}$.

$$\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi_m \rangle \geq \int_{\varepsilon}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2m}}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{dx}{x} = \log m.$$

Alors on fait tendre m vers l'infini: $|\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi_m \rangle| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$, et $\|\varphi_m\|_\infty = 1$ pour tout m .

Donc $\text{vp}(\frac{1}{x})$ n'est pas d'ordre 0. C'est donc une distribution d'ordre 1.

Exercice 7:

1. Soit $[-a, a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]^2$ ($a > 0$).

Alors:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) - \varphi(0, \sin t) \right) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) \frac{ds}{t^2} dt \right|$$

$$\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} \left| \int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) ds \right| \frac{dt}{t^2} = \left[\varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) \right]_0^1$$

$$\leq \|\partial_x \varphi\|_\infty \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \|\partial_x \varphi\|_\infty \left[-\frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} = \sqrt{a} \|\partial_x \varphi\|_\infty.$$

Comme T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cette estimation de $|\langle T, \varphi \rangle|$ nous dit que T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. Montrons que si $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0\}$, alors $\text{supp } T = \bar{S} = S \cup (\{0\} \times [t, 1])$.



• Soit $x_0 \notin \bar{S}$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subset \bar{S}^c$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset \bar{B}(x_0, \varepsilon)$. Alors par définition de T , $\langle T, \varphi \rangle = 0$ car: $\forall t > 0$, $(\frac{1}{t^2}, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \varepsilon)$ et $(0, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \varepsilon)$.

Donc $x_0 \notin \text{supp } T$ et $\text{supp } T \subset \bar{S}$.

• Réciproquement, soit $x_0 \in S$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \cap (\{0\} \times [t, 1]) = \emptyset$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\text{supp } \varphi \subset B(x_0, \varepsilon)$, $\varphi = 1$ sur $\bar{B}(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi \geq 0$. Alors:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) dt \geq t_2 - t_1 > 0$$

où t_1 est tel que $x_0 = (\frac{1}{t_1^2}, \sin t_1)$ et $t_2 = \inf \{t > t_1, (\frac{1}{t^2}, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \frac{\varepsilon}{2})\}$.

Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, $\bar{S} \subset \text{supp } T$ et finalement, $\text{supp } T = \bar{S}$.

Exercice 8 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

Alors: $\forall \varphi \in C^\infty_0(I)$, $\int_I f(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0)$ (*).

En particulier: $\forall \varphi \in C^\infty_0(I)$, $x_0 \notin \text{supp } \varphi$, $\int_I f(x) \varphi(x) dx = 0$.

Soit $J = I \cap \{x < x_0\}$ et supposons $\text{supp } \varphi \subset J$.

Alors $\int_J f \varphi = 0$ et $f = 0$ sur J

De même, $f = 0$ sur $J' = I \cap \{x > x_0\}$. Comme $I = J \cup \{x_0\} \cup J'$,

$f = 0$ presque partout sur I ($\text{Leb}(\{x_0\}) = 0$) et :

$$\forall \varphi \in C^\infty_0(I), \int_I f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (**),$$

Mais, si $\varphi \in C^\infty_0(I)$ est telle que $\varphi(x_0) \neq 0$, alors (**) contredit (*).

Donc, il ne peut exister $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\delta_{x_0} = T_f$.

Exercice 9 - Partie finie de x^α

1. Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

Pour $\alpha \in]-2, -1[$ et $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) + x^{\alpha+1} \psi(x) dx$$

$$\text{avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du \text{ et donc } \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x).$$

$$\text{Alors : } \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) dx + \int_{\varepsilon}^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx.$$

$$\text{On : } \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) \right]_{\varepsilon}^a = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0)$$

$$\text{On pose } A_\varphi = -\frac{\varphi(0)}{\alpha+1} \text{ et } R_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}$$

Comme $\alpha \in]-2, -1[$, $x \mapsto x^{\alpha+1}$ est intégrable au voisinage de 0, donc comme φ est $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et bornée, $x \mapsto x^{\alpha+1} \psi(x)$ est aussi intégrable au voisinage de 0. Donc R_ε possède une limite lorsque ε tend vers 0^+ .

$$\int_0^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}.$$

$$\text{On a bien : } \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon \text{ avec } R_\varepsilon \text{ possédant une limite en } 0^+.$$

$$\underline{2.} \text{ On pose : } \langle p_f(x^\alpha), \varphi \rangle = \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1} + \int_0^a x^{\alpha+1} \left(\int_0^1 \varphi'(xu) du \right) dx.$$

$$\text{Alors : } |\langle p_f(x^\alpha), \varphi \rangle| \leq C_0 \|\varphi\|_\infty + C_1 \|\varphi'\|_\infty$$

et $p_f(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

$$\text{De plus : } \text{supp } p_f(x^\alpha) = \mathbb{R}_+.$$

Exercice 10

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Soit $M \geq 0$ tel que
 $\text{supp } \varphi \subset \{x : |x| \leq M\}$.

La fonction $u\varphi$ est alors intégrable sur l'ensemble $\{x : |x| \geq \varepsilon\}$.

Posons $x = n\omega$ où $n \in [\varepsilon, +\infty[$ et $\omega \in S^{m-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad I_\varepsilon &= \int_{|x| \geq \varepsilon} u(x) \varphi(x) dx = \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} u(n\omega) \varphi(n\omega) n^{m-1} dn d\omega \\ &= \int_\varepsilon^M \frac{1}{n} \left(\int_{S^{m-1}} u(\omega) \varphi(n\omega) d\omega \right) dn \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse faite sur u . On applique ensuite la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 à φ :

$$\varphi(n\omega) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^m n\omega_j \int_0^1 \psi_j(tn\omega) dt \quad \text{avec } \psi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

D'où :

$$I_\varepsilon = \underbrace{\varphi(0) \left(\int_\varepsilon^M \frac{dn}{n} \right) \left(\int_{S^{m-1}} u(\omega) d\omega \right)}_{A_\varepsilon} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \int_\varepsilon^M \int_{S^{m-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega) \psi_j(tn\omega) dt d\omega dn}_{B_\varepsilon}$$

Or, comme $u \in C^0(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$, il existe pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$ une constante $C_j > 0$ telle que :

$$\sup_{n \in [0, M]} \sup_{\omega \in S^{m-1}} \sup_{t \in [0, 1]} |\omega_j u(\omega) \psi_j(tn\omega)| \leq C_j$$

Par convergence dominée, B_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0. Ainsi, I_ε admet une limite lorsque ε tend vers 0 si et seulement si A_ε en admet une.

Si $\int_{S^{m-1}} u(\omega) d\omega = 0$, alors $A_\varepsilon = 0$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $\varepsilon > 0$.

Si $\int_{S^{m-1}} u(\omega) d\omega \neq 0$, A_ε n'admet pas de limite pour les φ telles que $\varphi(0) \neq 0$ car $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^M \frac{dr}{r} = +\infty$.

D'où l'équivalence voulue.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= \left| \sum_{j=1}^m \int_0^M \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \omega_j u(\omega) \psi_j(t\omega) dt d\omega \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \int_0^M \int_{S^{n-1}} \int_0^1 |\omega_j u(\omega) \psi_j(t\omega)| dt d\omega \\ &\leq C \sum_{j=1}^m \sup_{|x| \leq M} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|, \quad C \text{ constante indépendante de } \varphi. \end{aligned}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 11 - Distribution d'ordre infini.

- $T: \varphi \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$ est une forme linéaire sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, continue.

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet si $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$, en posant

$p_0 = E(a) + 1$, on a:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi^{(p)}(p) \right| = \left| \sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p) \right| \leq \underbrace{\sum_{p=0}^{p_0} \|\varphi^{(p)}\|_{\infty}}_{\text{somme finie}}.$$

- Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m .

Soit $\varphi_0 \in C_0^{\infty}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, égale à 1 sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, positive. Soit $\lambda > 1$

Posons $\varphi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \varphi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \varphi(\lambda(x - (m+1)))$.

On considère le compact $K = [m + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}]$ de $\mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et est C^{∞} . D'autre part, par la formule de Leibnitz,

on a: $\varphi^{(m+1)}(0) = \varphi_0(0) = 1$.

Puis, comme $\text{supp } \varphi \subset K$, on a: $\langle T, \varphi \rangle = \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1} \varphi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}$.

D'autre part, pour $j \leq m$, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup |\varphi_0^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \|\varphi_0^{(j)}\|_{\infty}.$$

Or, T est supposée d'ordre m , donc pour $K = [m + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}]$, il existe $C_K \in \mathbb{R}_+^*$

telles que: $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{0 \leq j \leq m} \|\varphi^{(j)}\|_{\infty}$, soit ici:

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^m \lambda^j \|\varphi_0^{(j)}\|_{\infty} \leq C_K \left(\sum_{j=0}^m \|\varphi_0^{(j)}\|_{\infty} \right) \lambda^m$$

Or, cela est impossible si $\lambda \rightarrow +\infty$ car on a: $\lambda \leq C_K \left(\sum_{j=0}^m \|\varphi_0^{(j)}\|_{\infty} \right) < +\infty$.
Donc T ne peut pas être d'ordre fini.