Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On écrit : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle = n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= n\left(\varphi(0) + \frac{1}{n}\psi\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\varphi(0) - \frac{1}{n}\psi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\psi(0) = 2\int_0^1 \varphi'(0)\,du$$

$$= 2\varphi'(0)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\varphi'(0) = \langle 2\delta_0', \varphi \rangle$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2\delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, pour tout n, T_n est d'ordre 0 et $2\delta_0'$ est d'ordre 1. En général, il n'y a pas de lien entre l'ordre des éléments de la suite et l'ordre de la limite.

Exercice 2

(i) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle A_n, \varphi\rangle = \int_{-A}^{A} \sin(nx)\varphi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x)\right]_{-A}^{A}}_{=0} + \int_{-A}^{A} \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\langle A_n,\varphi\rangle| \leq \frac{1}{n}\int_{-A}^{A} |\varphi'(x)|\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle B_n, \varphi\rangle = \int_{-A}^{A} n\, g(nx)\varphi(x)\,dx \underset{u=nx}{=} \int_{-nA}^{nA} g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u)\,du.$$

Or : $g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(u)\varphi(0)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

et : $\left|g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u)\right| \leq |g(u)|\,\|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$

Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$\langle B_n, \varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} g(u)\,du$$

Donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\int_{\mathbb{R}} g(u)\,du\right)\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors :

$$\langle G_n, \varphi\rangle = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{p}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{sommes de Riemann}} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx.$$

Donc $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution associée à $\mathbb{1}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\langle D_n, \varphi\rangle = \langle e^{inx}\, vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi\rangle = \langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right), e^{inx}\varphi\rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + i\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$$

Pour la partie réelle :

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi\subset[-A,A]$.

On a : $$\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\underbrace{\cancel{\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \frac{\cos(nx)}{x}\,dx}}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\psi(x)\,dx$$

Donc : $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-A}^{A} \cos(nx)\psi(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour la partie imaginaire : $$\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\int_{A\geq|x|>\varepsilon}\frac{\sin(nx)}{x}\,dx + \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)\sin(nx)\,dx$$

Donc : $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\underbrace{\int_{-A}^{A}\frac{\sin(nx)}{x}\,dx}_{\downarrow n\to+\infty \;\; \pi} + \underbrace{\int_{-A}^{A} \sin(nx)\psi(x)\,dx}_{\downarrow n\to+\infty \;\; 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi\varphi(0)+0$$

Donc $\langle D_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} i\pi\varphi(0)$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $i\pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 3 :

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On note $R>0$ un réel tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R,R]$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$\langle T_n,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nt)}{\pi t}\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{\sin(nt)}{\pi t}\varphi(t)\,dt$$

Or, par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, on peut écrire : $\forall t\in\mathbb{R},\ \varphi(t)=\varphi(0)+t\,\psi(t)$ avec $\psi(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Alors :

$$\langle T_n,\varphi\rangle = \frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\sin(nt)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\psi(t)\sin(nt)\,dt.$$

- On effectue le changement de variables $u=nt$ dans la première intégrale pour obtenir :

$$\int_{-R}^{R}\frac{\sin(nt)}{t}dt = \int_{-nR}^{nR}\frac{\sin(u)}{u/n}\frac{du}{n} = \int_{-nR}^{nR}\frac{\sin u}{u}du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$$

Or, par parité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du = 2\times\frac{\pi}{2}=\pi.$

- Puis, par le lemme de Riemann-Lebesgue, la seconde intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On peut rapidement le redémontrer par IPP :

$$\forall n\geq 1,\quad \left|\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\psi(t)\sin(nt)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\psi(t)\right]_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R}\frac{\cos(nt)}{n}\psi'(t)\,dt\right)\right|$$

car $|\cos(nt)|\leq 1$ $\rightarrow$ $$\leq \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n}\|\psi\|_\infty + \frac{2R}{n}\|\psi'\|_\infty\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- Finalement on a obtenu que :

$$\langle T_n,\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\varphi(0)}{\pi}\times\pi = \varphi(0) = \langle\delta_0,\varphi\rangle$$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Convergence dans $\mathcal{D}'$ + bornée L^2 $\Rightarrow$ cv faible L^2.

1. Soit (u_n) bornée dans L^2 telle que $T_{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$.

On a : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle T_{u_n}, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} u_n(x)\varphi(x)\,dx\right| \underset{CS}{\leq} \|u_n\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \leq M\|\varphi\|_{L^2}$$

D'où ($n\to+\infty$) : $|\langle T,\varphi\rangle| \leq M\|\varphi\|_{L^2}$

Alors, par densité de C_0^∞ dans L^2, T se prolonge en une forme linéaire $\tilde{T}$ C^0 sur L^2 telle que :

$$\forall \varphi \in L^2, \quad |\langle \tilde{T},\varphi\rangle| \leq M\|\varphi\|_{L^2}$$

(on pose $\forall \varphi \in L^2$, $\langle \tilde{T},\varphi\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle T,\varphi_n\rangle$ où $\varphi_n \in C_0^\infty$ et $\varphi_n \xrightarrow{L^2} \varphi$)

Par le théorème de Riesz : $\exists u \in L^2$,

$$\forall \varphi \in L^2, \quad \langle \tilde{T},\varphi\rangle = (u|\varphi)$$

et en particulier :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty, \quad \langle T,\varphi\rangle = (u|\varphi) = \langle T_u,\varphi\rangle$$

D'où $T = T_u$ avec $u \in L^2$

2. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} u$.

Soit $v \in L^2$. Soit $\varepsilon > 0$ $\exists v_\varepsilon \in C_0^\infty$, $\|v - v_\varepsilon\|_{L^2} \leq \varepsilon$.

Alors

$$\begin{aligned}
|(u_n|v) - (u|v)| &= |(u_n | v - v_\varepsilon + v_\varepsilon) - (u | v - v_\varepsilon + v_\varepsilon)| \\
&\leq |(u_n - u | v - v_\varepsilon)| + |(u_n | v_\varepsilon)| \\
&\leq \|u_n - u\|_{L^2}\|v - v_\varepsilon\|_{L^2} + \underbrace{|\langle T_{u_n} - T_u | v_\varepsilon\rangle|}_{\leq \varepsilon \text{ apcr, car } v_\varepsilon \in C_0^\infty \text{ et } u_n \to u \text{ dans } \mathcal{D}'} \\
\text{apcr} \quad &\leq (M + \|u\|_{L^2})\,\varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. Soit $t \not\equiv 0\,[2\pi]$. Alors : $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = e^{-iNt} + \dots + 1 + \dots + e^{iNt}$

$$= e^{-iNt}\left[1 + \dots + e^{2iNt}\right]$$

$$= e^{-iNt}\,\frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \underbrace{e^{-iNt}\,e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}\,e^{-i\frac{t}{2}}}_{=1}\;\frac{e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t} - e^{-i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $F_N(t) = \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{m=-M}^{M} \int_{2m\pi-\pi}^{2m\pi+\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt$$

$$\overset{u=t+2m\pi}{=} \sum_{m=-M}^{M} \int_{-\pi}^{\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par } 2\pi \text{ périodicité de } F_N}}{F_N(u)}\, \varphi(u-2m\pi)\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} \underbrace{\sum_{m=-M}^{M} \varphi(u-2m\pi)}_{=\phi(u)}\,du$$

3. On écrit $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. D'où :

$$\forall N \in \mathbb{N},\quad \langle T_N, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t\,dt$$

Or, $t \mapsto \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t) \in L^1([-\pi,\pi])$, donc par Riemann-Lebesgue la seconde intégrale tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

D'autre part :

$$\frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,dt = \frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}\,dt$$

$$= \frac{\phi(0)}{2\pi} \times 2\pi = \phi(0)$$

Donc : $\langle T_N, \varphi\rangle \xrightarrow[N\to+\infty]{} \phi(0) = \sum_{k=-M}^{M}\varphi(2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2k\pi)$

$$= \langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}, \varphi\rangle.$$

Donc $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On en déduit la formule de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}.$$

Exercice 6

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors: $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty 1 \times \varphi'(x)\,dx$$

$$= -[\varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty 0\,dx$$

Donc $H' = \delta_0$ $\qquad = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors: $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle$
$\text{supp}\,\varphi \subset [-A, A]$.

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx$$

Or: $\displaystyle\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + (\log \varepsilon)\,[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)]$

Or, en écrivant Taylor à l'ordre 1 pour φ, on obtient:

$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\,\psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\,\tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Donc: $(\log \varepsilon)\,[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] = -(\varepsilon \log \varepsilon)\,(\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(\varepsilon))$

Or $\varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ donc $(\log \varepsilon)\,[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

et $\displaystyle\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = vp\left(\frac{1}{x}\right).$

Donc: $(\log|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-A,A]$. Alors :

$$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi\rangle = -\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi'\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

Or : $$-\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

Or, $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Donc : $$-\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \underbrace{[\psi(\varepsilon)+\tilde{\psi}(-\varepsilon)]}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0}$$

D'où : $$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right] := \mathrm{pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 7

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $0 = \langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle$

Donc u s'annule sur les fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ de la forme $\psi = \varphi'$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrons que :

$$\left(\psi = \varphi', \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \right) \Leftrightarrow \left(\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,dx = 0 \right)$$

$\Rightarrow$) Ok car φ à support compact.

$\Leftarrow$) Posons $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt$ avec $\operatorname{supp}\psi \subset [-M, M]$.

Alors $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si $x < -M$, $\varphi(x) = 0$ car ψ est nulle sur $]-\infty, x]$ dans ce cas. Si $x > M$ alors $\int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt = 0$

D'où : $\forall x > M, \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt + 0 = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,dt + \int_x^{+\infty} \psi(t)\,dt$

$$= \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt = 0,$$

Donc $\operatorname{supp}\varphi \subset [-M, M]$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \chi(x)\,dx = 1$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt\right) \chi(x)$

Alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$. Donc $\exists \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\psi = \theta'$ et donc $\langle u, \psi \rangle = 0$.

Alors : $\langle u, \varphi \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt\right) \overbrace{\langle u, \chi \rangle}^{C} = C \langle 1, \varphi \rangle = \langle C, \varphi \rangle$

Donc $u = C$.

2. On a : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle$
$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$ $v(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Comme f est C^0, $v \in C^1(\mathbb{R})$.

Montrons que $u = v$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \langle v', \varphi \rangle = -\langle v, \varphi' \rangle$$
$$= -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi'(x)dx$$
$$= -\left([v(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} v'(x)\varphi(x)dx \right)$$
$$= 0 + \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$
$$= \langle u', \varphi \rangle$$

Donc $u' = v'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et

$\exists C \in \mathbb{R}$, $u = v + C$ car $(u-v)' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\Rightarrow u - v = \text{cste}$ p.p.

Donc $u \in C^1(\mathbb{R})$ et on a bien $u' = f$ au sens usuel.

3. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$.

Alors : $F(x_n) = \int_0^{x_n} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(t) \mathbb{1}_{[0,x_n]}(t)}_{\text{à support } \subset [-M,M]}dt$ où M borne de (x_n) cv.

car $f \in L^1([-M,M])$ $\rightarrow$ TCD $\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(t) \mathbb{1}_{[0,x_0]}(t)dt$

$$= \int_0^{x_0} f(t)dt = F(x_0).$$

Donc F est C^0 sur $\mathbb{R}$.

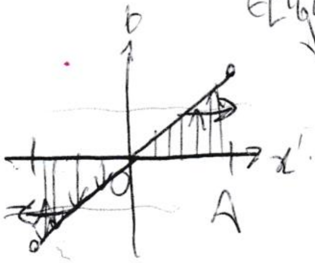
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle F', \varphi \rangle = -\langle F, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx$$

$\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx$$

$(x,t) \mapsto f(t)\varphi'(x) \in L^1([-A,A]^2)$



Fubini

$$= -\int_{-A}^{A} \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-A}^{0} \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{A} \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \varphi'(x)\,dx$$

$$= +\int_{-A}^{0} \left(\int_{-A}^{t} f(t)\varphi'(x)\,dx \right) dt - \int_{0}^{A} \left(\int_{t}^{A} f(t)\varphi'(x)\,dx \right) dt$$

$$= +\int_{-A}^{0} f(t) \left[\varphi(x) \right]_{-A}^{t} dt - \int_{0}^{A} f(t) \left[\varphi(x) \right]_{t}^{A} dt$$

$$= +\int_{-A}^{0} f(t)\varphi(t)\,dt + \int_{0}^{A} f(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{-A}^{A} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\,dt = \langle f, \varphi \rangle.$$

D'où $F' = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

1. Soit $x_0 \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ une primitive de f. Alors, F est C^∞ sur I. De plus, l'équation différentielle $u' + fu = g$ est équivalente à $\frac{d}{dx}(e^F u) = e^F g$ qui a pour solution C^∞,

$$u_0(x) = e^{-F(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\,dt + C \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Posons $T = u_0 + e^{-F} S$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} g = T' + fT &= u_0' + fu_0 + e^{-F}(S' - fS) + e^{-F} fS \\ &= g + e^{-F} S' \end{aligned}$$

D'où, $e^{-F} S' = 0$ et $S' = 0$. Alors S est une constante et $T = u_0 + Ce^{-F}$. Donc T est donnée par une fonction C^∞ qui vérifie l'équation au sens usuel.

Exercice 9

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle x\, vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x\varphi\rangle$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|\geq \varepsilon} \frac{x\,\varphi(x)}{x}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \langle 1, \varphi\rangle.$$

Donc on a bien : $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.

2. a. On sait que T s'annule sur les fonctions de la forme $x\varphi$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que l'on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x) \quad \text{avec } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \varphi(0) \neq 0.$$

Soit maintenant $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur le support de φ. En multipliant l'égalité précédente par ϕ on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x) = \varphi(x)\phi(x) = \varphi(0)\,\phi(x) + x\,\psi(x)\,\phi(x).$$

D'où : $\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \phi\rangle + \langle xT, \psi\phi\rangle$

Or $xT = 0$ donc : $\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\langle T, \phi\rangle$

et comme $\varphi(0) \neq 0$: $\langle T, \phi\rangle = \dfrac{\langle T, \varphi\rangle}{\varphi(0)} = c_\varphi$, indépendante de ϕ.

b. On choisit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que ϕ vaille 1 à la fois sur le support de φ et sur le support de $\tilde{\varphi}$. Alors :

$$c_\varphi = \langle T, \phi\rangle = c_{\tilde{\varphi}}.$$

c. Notons C la valeur commune de toutes les c_φ pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \varphi(0) \neq 0$.

Alors, $\langle T, \varphi\rangle = \varphi(0)\, C = C\langle \delta_0, \varphi\rangle$.

Si $\varphi(0) = 0$ on a encore $\langle T, \varphi\rangle = C\langle \delta_0, \varphi\rangle = 0$.

Donc si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec $xT = 0$, alors $T = C\delta_0$, $C \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

La réciproque est vraie car $x\, C\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $x\, C\delta_0 = 0$ car $\mathrm{supp}(\delta_0) \subset \{0\}$.

3. Comme $x\,vp(\frac{1}{x})=1$, l'équation $xT=1$ s'écrit :

$$x\,(T-vp(\tfrac{1}{x}))=0.$$

D'où par 2.c., $T-vp(\frac{1}{x})=C\delta_0$, $C\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Donc les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $xT=1$ sont les $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la forme $T=vp(\frac{1}{x})+C\delta_0$, $C\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

4. (i) Soit $O_m=]-\frac{3\pi}{4}+m\pi, \frac{3\pi}{4}+m\pi[$. Alors $(O_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est un recouvrement localement fini de $\mathbb{R}$. Soit $(\chi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ une partition de l'unité associée à $(O_m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On décompose φ en :

$$\varphi=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\varphi\chi_m \underset{not}{:=} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\varphi_m.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, chaque φ_m s'écrit : $\forall x\in\mathbb{R}, \varphi_m(x)=\varphi(m\pi)+(x-m\pi)\psi_m(x)$ avec $\psi_m\in C_0^\infty(O_m)$.
On remarque par ailleurs que $x\mapsto\frac{x-m\pi}{\sin x}$ est C^∞ sur O_m. Enfin, si η_m est une fonction plateau valant 1 sur O_m et à support dans $]-\pi+m\pi, \pi+m\pi[$, alors on écrit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi_m(x)=\varphi_m(x)\eta_m(x)=\varphi(m\pi)\eta_m(x)+\sin x\,\underbrace{\frac{x-m\pi}{\sin x}\psi_m(x)\eta_m(x)}_{=\theta_m\ \in C_0^\infty(\mathbb{R})}$$

Donc : $$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big[\langle T,\eta_m\rangle\varphi(m\pi)+\underbrace{\langle(\sin x)T,\theta_m\rangle}_{\overset{\shortparallel}{0}}\Big]$$
$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle T,\eta_m\rangle\varphi(m\pi)$$

Si on pose $c_m=\langle T,\eta_m\rangle$, on a bien : $T=\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m\delta_{m\pi}$.

(ii) Réciproquement, si $T=\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m\delta_{m\pi}$, comme $\sin(m\pi)=0$, on a bien : $(\sin x)T=0$.

Exercice 10

1. On a : $(xT)' = xT' + T$.

2. Par 1., l'équation $xT' + T = 0$ devient $(xT)' = 0$.

Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $xT = C_1$. Or, $C_1 vp(1/x)$ est solution de cette équation. Donc : $xT = C_1 \iff x(T - C_1 vp(1/x)) = 0$.

Donc il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$T - C_1 vp(1/x) = C_2 \delta_0$$

soit encore : $T = C_1 vp(1/x) + C_2 \delta_0$.

Exercice 11

1. Comme l'équation différentielle $2xu'-u=0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_1\sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_2\sqrt{x}$.

On note $x_+=\max(x,0)$ et $x_-=\max(-x,0)$.

Les fonctions localement intégrables $u: x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu'-u=0$.

2.a. Les distributions associées aux fonctions $u: x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT'-T=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT'-T=0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1=\frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

Alors : $S_1'=\frac{T_1'}{\sqrt{x}}-\frac{T_1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2xT_1'-T_1}{2x\sqrt{x}}=0$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (connexe), il existe $C_1\in\mathbb{R}$ telle que $S_1=C_1$. D'où $T_1=C_1\sqrt{x_+}$.

De même : $T_2=C_2\sqrt{x_-}$.

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
$= \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - 0$
$= 0$

Et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
$= \langle T_2, \varphi \rangle - 0 - \langle T_2, \varphi \rangle$
$= 0$.

Donc $\mathbb{R}_+^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$ et $\mathbb{R}_-^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$, donc $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_-$ et $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+$.

Donc : $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R = 0$ alors $2xR' - R = 0$.

Réciproquement, supposons que $2xR' - R = 0$ et montrons que $R = 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi \rangle = -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)' \rangle$$
$$= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi \rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi' \rangle$$
$$= 2(-1)^{k+1} \left(2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0) \right)$$
$$= 2(-1)^{k+1} (k+1) \varphi^{(k)}(0)$$

Donc $2xR' - R = \sum_{k=0}^{p} \left(2(-1)^{k+1}(k+1) - 1 \right) a_k \delta^{(k)}$

Or $2xR' - R = 0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R = 0$.

d. Comme par b., $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT' - T = 0$, alors S aussi et donc par c., $S = 0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ ~~sont~~ les solutions de $2xT' - T = 0$.

3. La forme du second membre δ_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0 \delta_0$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)(1) - 1) a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT' - T = \delta_0$ sont les

$$C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-} - \frac{1}{3} \delta_0 .$$