Exercice 1 :

2 Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle \delta_0' * \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi^\Delta(x,y) \rangle$

$= \langle \delta_0', -\langle \delta_0, \partial_y \varphi^\Delta(x,y) \rangle \rangle$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$. $= \langle \delta_0', -\varphi'(x) \rangle$

$= \varphi''(0)$.

Donc $\delta_0' * \delta_0' = \delta_0''$.

On peut aussi dériver l'égalité : $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, deux fois.

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note φ_x la fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. On a :

$$\langle \delta_a' \otimes \delta_b', \varphi \rangle = \langle \delta_a', \langle \delta_b', \varphi_x \rangle \rangle = \langle \delta_a', -\varphi_x'(b) \rangle$$
$$= \langle \delta_a', -\partial_y \varphi(x,b) \rangle = \partial_x \partial_y \varphi(a,b).$$

3. $E = \delta_0^{(k)}$ convient. En effet si on dérive k fois l'identité $\delta_0 * T = T$ on obtient
$$\delta_0^{(k)} * T = T^{(k)}.$$

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle X^m (T*S), \varphi \rangle = \langle T*S, X^m \varphi \rangle = \langle T \otimes S, (x+y)^m \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle T \otimes S, x^k y^{m-k} \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle (x^k T) \otimes (y^{m-k} S), \varphi^\Delta(x,y) \rangle = \langle \sum_{k=0}^{m} C_m^k (X^k T) * (X^{m-k} S), \varphi \rangle$$

Exercice 2.

1. On a $\mathrm{supp}(T*S) \subset \mathrm{supp}\,T + \mathrm{supp}\,S \subset [0,+\infty[+ [0,+\infty[$
$= [0,+\infty[$.

Donc $T*S \in \mathcal{D}'_+$.

2. Pour $n=1$ le résultat est évident : $\forall x \in [0,a]$, $|K(x)| \leq \sup_{x\in[0,a]} |K(x)|$.

Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 1$. Alors, soit $a>0$ et $x \in [0,a]$

$$|K_{n+1}(x)| = |K_n * K(x)| = \int_{\mathbb{R}} K(x-y) K_n(y)\,dy$$

$$= \left| \int_0^x K(x-y) K_n(y)\, dy \right| \quad \text{car} \quad \operatorname{supp} K \subset \mathbb{R}_+ .$$

$$\leq \int_0^x |K(x-y)|\, |K_n(y)|\, dx$$

Or si $y \in [0,x] \subset [0,a]$ on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $|K_n(y)|$ pour obtenir :

$$|K_{n+1}(x)| \leq \int_0^x M(a) \frac{M(a)^n}{(n-1)!} y^{n-1}\, dy$$

$$= M(a)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

Donc le résultat est bien démontré par récurrence.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a,a]$, $a > 0$.

Alors : $|\langle K_n, \varphi \rangle| \leq \int_0^a M(a)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(x)\, dx$

D'où pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^N |\langle K_n, \varphi \rangle| \leq \int_0^a M(a) \varphi(x) \sum_{n=1}^N \frac{(M(a)x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx$$

Comme la série exponentielle converge uniformément sur le compact $[0,a]$ on peut passer à la limite sous l'intégrale pour obtenir que : $\forall N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} |\langle K_n, \varphi \rangle| \leq \int_0^a M(a) \varphi(x) e^{M(a)x}\, dx$

Donc la série $\sum |\langle K_n, \varphi\rangle|$ a ses sommes partielles croissantes et bornées donc elle est convergente. Donc pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\sum (-1)^n \langle K_n, \varphi\rangle$ est absolument convergente donc convergente, donc $\sum (-1)^n K_n$ est convergente dans $\mathcal{D}'_+$.

4. Soit $x \in [0, a]$, $a > 0$. Alors:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n K_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |K_n(x)|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} M(a)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} M(a)^n \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} = M(a) \exp(M(a)a)$$

D'où le résultat.

5. Soit $N \geq 0$. On a: $(\delta_0 + K) * \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n K_n\right) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n K_n + \sum_{n=0}^{N} (-1)^n K_{n+1}$

$$= K_0 + K_1 - K_1 + K_2 - K_2 + \dots + (-1)^N K_{N+1} = K_0 + (-1)^N K_{N+1}$$

$$= \delta_0 + (-1)^N K_{N+1}.$$

Or la série $\sum (-1)^n K_n$ converge dans $\mathcal{D}'_+$ donc $(-1)^N K_{N+1}$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'_+$ lorsque N tend vers $+\infty$. Donc par passage à la limite dans $\mathcal{D}'_+$ (licite par continuité de l'opération de convolution) : $(\delta_0 + K) * \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n K_n\right) = \delta_0$.

6. On a : $\forall x \geq 0, \left(\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(\cdot) e^{\lambda \cdot}\right) * f\ (x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x-y) e^{\lambda(x-y)} f(y)\,dy$

$$= \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y)\,dy.$$

Donc dans $\mathcal{D}'_+$: $(He^{\lambda \cdot}) * f = T_{x \mapsto \int_0^x e^{\lambda(x-y)} f(y)\,dy}$

et comme $\delta_0 * f = f$, on a bien l'équivalence voulue.

7. Comme $x \mapsto \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) e^{\lambda x}$ est localement bornée, on peut appliquer le résultat de la question 5. pour obtenir que dans $\mathcal{D}'_+$, l'équation $(\delta_0 + He^{\lambda \cdot}) * f = g$ admet pour solution : $f = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (He^{\lambda \cdot})_n\right) * g$ dans $\mathcal{D}'_+$.

où $(He^{\lambda \cdot})_n = (He^{\lambda \cdot}) * \dots * (He^{\lambda \cdot})$ n fois avec $(He^{\lambda \cdot})_0 = \delta_0$.

En effet :

$$(\delta_0 + He^{\lambda \cdot}) * f = g \iff \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (He^{\lambda \cdot})_n\right) * (\delta_0 + He^{\lambda \cdot})}_{=\delta_0} * f = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (He^{\lambda \cdot})_n\right) * g$$

$$\iff f = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (He^{\lambda \cdot})_n\right) * g.$$

Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} (He^{\lambda_0})_n = \delta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (He^{\lambda_0})_n$

où $\sum_{n=1}^{+\infty} (He^{\lambda_0})_n$ est associée à une fonction localement bornée sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question 4., donc si on note L cette fonction localement bornée, on a :

$$\forall x \geq 0, \ f(x) = g(x) + \int_0^x L(x-y) g(y) dy$$

et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ car L est localement bornée et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$

Exercice 3 - Equation de Laplace

1. Pour $d=1$ et $x \in \mathbb{R}$, on écrit $E(x) = x_+ = x\,H(x)$.

   Alors $(x\,H(x))' = H(x) + \underbrace{x\,\delta_0}_{=0}$ et $(x\,H(x))'' = H'(x) = \delta_0$.

   Donc $E'' = \delta_0$.

2. On suppose $d \geq 2$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\partial_j F(x) = \partial_j(|x|)\, f'(|x|) = \frac{x_j}{|x|} f'(|x|).$$

et

$$\partial_{jj}^2 F(x) = \frac{x_j}{|x|} \times \partial_j(|x|) f''(|x|) + \partial_j\left(\frac{x_j}{|x|}\right) f'(|x|)$$

$$= \frac{x_j^2}{|x|^2} f''(|x|) + \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3}\right) f'(|x|)$$

D'où :

$$\Delta F(x) = \sum_{j=1}^d \partial_{jj}^2 F(x) = \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^2} f''(|x|) + \left(\sum_{j=1}^d \frac{1}{|x|}\right) f'(|x|) - \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^3} f'(|x|)$$

$$= \frac{|x|^2}{|x|^2} f''(|x|) + \frac{d}{|x|} f'(|x|) - \frac{|x|^2}{|x|^3} f'(|x|)$$

$$= f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} f'(|x|).$$

3. On résout, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle linéaire : $f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = 0$.

   Si $d = 2$, on obtient $f(r) = a + b \log r$, $a, b \in \mathbb{R}$.

   Si $d \geq 3$, on obtient $f(r) = a + \frac{b}{r^{d-2}}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Pour F comme dans l'énoncé et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta F, \varphi \rangle = \langle F, \Delta\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} F(x)\,(\Delta\varphi)(x)\,dx.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Par la formule de Green, on a :

normale sortante : $\vec{N} = -\frac{x}{|x|}$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta F)(x)\varphi(x) - F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{N}\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,\varphi(x) - \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,F(x)\right)d\sigma(x)$$

D'où :

$$\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \underbrace{\cancel{\int_{|x|>\varepsilon} (\Delta F)(x)\,\varphi(x)\,dx}}_{=0 \text{ par } 3.} + \int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\cdot\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,\varphi(x) - \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,F(x)\right)d\sigma(x)$$

- On a aussi :

$$\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}} F(\varepsilon\omega)\,(-\nabla\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\underset{\substack{\uparrow \\ x/|x|}}{\omega})\,\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

Or : $F(\varepsilon\omega) = \begin{cases} \log\varepsilon & \text{si } d=2 \\ \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$

Donc $\displaystyle\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ car $\varepsilon\log\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ et $\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

- On a encore :

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\,\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}} \varphi(\varepsilon\omega)\,\underbrace{\nabla F(\varepsilon\omega)\cdot\omega}_{\frac{\partial f}{\partial n}(\varepsilon)}\,\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

avec $f(r) = \begin{cases} \log r & \text{si } d=2 \\ \frac{1}{r^{d-2}} & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$

Donc : si $d=2$:

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\,\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) = \varepsilon\int_{\omega\in S^1} \varphi(\varepsilon\omega)\,\frac{1}{\varepsilon}\,d\omega \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0)\int_{\omega\in S^1} d\omega = 2\pi\varphi(0).$$

et si $d\geq 3$.

$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\cdot\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,d\sigma(x) = \cancel{\varepsilon^{d-1}}\int_{\omega\in S^{d-1}} \varphi(\varepsilon\omega)\left(-\frac{d-2}{\cancel{\varepsilon^{d-1}}}\right)d\omega \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0)\times(-(d-2))\times\sigma(S^{d-1}).$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \begin{cases} 2\pi\varphi(0) & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\,\sigma(S^{d-1})\,\varphi(0) & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$$

Donc :

$$\langle \Delta F, \varphi\rangle = \begin{cases} 2\pi\langle \delta_0, \varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\,\sigma(S^{d-1})\,\langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$$

5. On a, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta E, \varphi\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\langle \Delta F, \varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ \frac{1}{-(d-2)\sigma(S^{d-1})}\langle \Delta F, \varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases} = \begin{cases} \langle \delta_0, \varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ \langle \delta_0, \varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases}$$

Donc $\Delta E = \delta_0$.

6. a. Si $p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est à support compact, $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} p\}$ est convolutive et pour $d=3$, $-\Delta(E*(-p)) = -(\Delta E)*(-p) = (-\delta_0)*(-p) = p$.

Donc $V = E*(-p)$ est solution de $-\Delta V = p$ et elle tend vers 0 à l'infini car pour $d=3$, $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$.

Si V_1 et V_2 sont deux solutions de $-\Delta V = p$ qui tendent vers 0 à l'infini, alors $\Delta(V_1 - V_2) = 0$ et par le théorème de Liouville, $V_1 - V_2 = 0$. Donc $V_1 = V_2$ et $E*(-p)$ est l'unique solution de $-\Delta V = p$ qui tende vers 0 à l'infini.

b. • Pour une charge unique à l'origine : $p = \delta_0$. Alors :

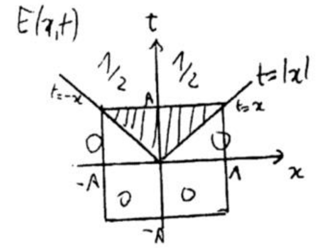
$$V = E*(-p) = E*(-\delta_0) = -E \quad \text{i.e. } V(x) = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

• Pour un dipôle : $p = \delta'_{x_0}$, $x_0 \neq 0$. Alors :

$$V = E*(-p) = E*(-\delta'_{x_0}) = -(E*\delta_{x_0})' = (-E)'*\delta_{x_0}.$$

Donc : $V(x) = \frac{1}{4\pi|x|}*\delta'_{x_0} = \left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)'*\delta_{x_0} = \tau_{x_0}\left(\frac{x}{4\pi|x|^3}\right) = \frac{x-x_0}{4\pi|x-x_0|^3}$

Exercice 4 :



1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]^2$, $A>0$. On a :

$$\langle (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E , \varphi \rangle = \langle E , (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)\varphi \rangle$$

Par Fubini

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\, dt\, dx + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\, dt\, dx - \int_0^A \int_{-t}^t \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\, dx\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t \varphi(x,x)\, dx + \int_{-A}^0 -\partial_t \varphi(x,-x)\, dx - \int_0^A \partial_x \varphi(t,t) - \partial_x \varphi(-t,t)\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t \varphi(u,u)\, du - \int_0^A \partial_x \varphi(u,u)\, du - \int_0^A \partial_t \varphi(-u,u)\, du + \int_0^A \partial_x \varphi(-u,u)\, du \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)\, du - \int_0^A \phi_2'(u)\, du \right] \text{ où } \phi_1(u) = \varphi(u,u) \text{ et } \phi_2(u) = \varphi(-u,u)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\phi_1(0) + \phi_2(0) \right] = \varphi(0,0) = \langle \delta_0 , \varphi \rangle .$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E = \delta_0$.

2. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} f\}$ est une paire convolutive et on a :

$$(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)(E * f) = (\partial_{tt}^2 E - \partial_{xx}^2 E) * f = \delta_0 * f = f.$$

Donc $u = E * f$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f$.

3. Comme E est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t = |x|\}$, et que $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t = |x|\}$ est de mesure nulle, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $E * f$ est C^∞ sur Ω.
Donc $u \in C^\infty(\Omega)$.

Exercice 5 :

1. γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1([0,1]) = \gamma_2([0,1]) = \Gamma$

γ_1, γ_2 injectives sur $[0,1[$, $\gamma_i(0) = \gamma_i(1)$

γ_i' ne s'annule jamais

$\gamma_1 : [0,1[\to \gamma_1([0,1[) = \underset{\gamma_2([0,1[)}{\overset{\shortparallel}{\Gamma}}$ bijective. $\quad \gamma_2 : [0,1[\to \gamma_2([0,1[) = \Gamma = \gamma_1([0,1[)$ bijective.

$$\gamma_2 = \gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_1^{-1}$$
$$= \gamma_1 \circ \underbrace{\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2}_{\varphi}$$

φ : bijection de $[0,1[$ dans $[0,1[$ (strictement croissante si même sens de parcours)

Alors : $\displaystyle\int_0^1 f(\gamma_2(t))\, \gamma_2'(t)\, dt = \int_0^1 f(\gamma_1 \circ \varphi(t))\, (\gamma_1 \circ \varphi)'(t)\, dt$

$$= \int_0^1 f(\gamma_1(\varphi(t)))\, \gamma_1'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

$u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)\, dt$

$$= \int_0^1 f(\gamma_1(u))\, \gamma_1'(u)\, du$$

2.

$$\int_\Gamma \underset{(f_I, f_R)}{X_1} \cdot \underset{-i\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}}{\vec{n}}\, \overset{\|\gamma'(t)\| dt}{d\sigma} = \int_\Omega \underset{\partial_x f_I + \partial_y f_R}{\operatorname{div} X_1}\, dx\, dy$$

$\vec{n}\, d\sigma = -i\gamma'(t)\, dt = (\gamma_I'(t) - i\gamma_R'(t))\, dt$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_\Gamma (f_R + i f_I)(z)\, dz = \int_0^1 (f_R(\gamma(t)) + i f_I(\gamma(t)))\, \gamma'(t)\, dt$$

$X_1 \cdot \vec{n}\, d\sigma$

$$= \int_0^1 (f_R(\gamma(t)) + i f_I(\gamma(t)))(\gamma_R'(t) + i\gamma_I'(t))\, dt$$

$$= \int_0^1 f_R(\gamma(t))\, \gamma_R'(t) - f_I(\gamma(t))\, \gamma_I'(t)\, dt + i \int_0^1 f_R(\gamma(t))\, \gamma_I'(t) + f_I(\gamma(t))\, \gamma_R'(t)\, dt$$

$\vec{n}\,d\sigma = -i\gamma'(t) = (\gamma_I'(t) - i\gamma_R'(t))\,dt$

$\simeq (\gamma_I'(t), -\gamma_R'(t))$

Or, par la formule de Green :

$$\int_0^1 f_R(\gamma(t))\,\gamma_R'(t) - f_I(\gamma(t))\,\gamma_I'(t)\,dt = -\int_\Gamma X_2\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_\Omega (+\partial_x f_R - \partial_y f_I)(x+iy)\,i\,dx\,dy$$

$dz = dx + i\,dy$

et $$\int_0^1 f_R(\gamma(t))\,\gamma_I'(t) + f_I(\gamma(t))\,\gamma_R'(t)\,dt = \int_\Gamma X_1\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_\Omega (\partial_x f_I + \partial_y f_R)(x+iy)\,i\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = i\int_\Omega \underbrace{\big((+\partial_x f_R + i\partial_x f_I) + \partial_y f_I + i\partial_y f_R\big)}(x+iy)\,dx\,dy$$

$$\partial_x(f_R + if_I) + \partial_y(if_R - f_I) = \partial_x(f_R+if_I) + i\partial_y(f_R+if_I) = (\partial_x + i\partial_y)f$$

On a finalement : $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = i\int_\Omega (\partial_x + i\partial_y)(f)(x+iy)\,dx\,dy$.

3\.

Soit $\varepsilon > 0$.

On a $g : z \mapsto \dfrac{f(z)}{z-w}$ est bien $C^1(\Omega \setminus \overline{B(w,\varepsilon)})$

car normale sortante à $\partial\Omega$ est "entrante" à $B(w,\varepsilon)$

Donc : $$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \int_{C(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

$$= \int_{\Omega\setminus\overline{B(w,\varepsilon)}} (\partial_x + i\partial_y)(g)(x+iy)\,dx\,dy \qquad (*)$$

Or : $$\partial_x g(x+iy) = \partial_x\left(\frac{f(x+iy)}{x+iy-w}\right) = \frac{\partial_x f(x+iy)\,(x+iy-w) - f(x+iy)}{(x+iy-w)^2}$$

$$= \frac{\partial_x f(x+iy)}{x+iy-w} - \frac{f(x+iy)}{(x+iy-w)^2}$$

$$\partial_y g(x+iy) = \frac{\partial_y f(x+iy)\,(x+iy-w) - if(x+iy)}{(x+iy-w)^2} = \frac{\partial_y f(x+iy)}{x+iy-w} - \frac{if(x+iy)}{(x+iy-w)^2}$$

D'où : $$(\partial_x + i\partial_y)(g)(x+iy) = \frac{(\partial_x+i\partial_y)(f)(x+iy)}{z-w} + \cancel{\frac{-f(z)+f(z)}{(z-w)^2}} = 0$$

D'où : $\forall \varepsilon > 0$, $\int_{\Omega \setminus \overline{B(w,\varepsilon)}} (\partial_x + i\partial_y)(g)(x+iy)\, dx\, dy = \int_{\Omega \setminus \overline{B(w,\varepsilon)}} (\partial_x f + i\partial_y f)(z) \frac{dx\, dy}{z-w}$

Par ailleurs : $\int_{C(w,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon e^{i\theta} + w)}{\cancel{\varepsilon} e^{i\theta} + \cancel{w} - \cancel{w}} \cancel{\varepsilon} i e^{i\theta} d\theta$

$= \int_0^{2\pi} f(w + \varepsilon e^{i\theta}) i\, d\theta \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{TCD} \int_0^{2\pi} i f(w)\, d\theta$

(en par C^0 de f en w)

$= 2i\pi f(w)$

On déduit de $(*)$ que $\int_{\Omega \setminus \overline{B(w,\varepsilon)}} (\partial_x f + i\partial_y f)(z) \frac{dx\, dy}{z-w}$ tend

vers $\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - 2i\pi f(w)$ lorsque ε tend vers 0.

D'où, en posant $\int_\Omega (\partial_x f + i\partial_y f)(z) \frac{dx\, dy}{z-w} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega \setminus \overline{B(w,\varepsilon)}} \dots$

On peut écrire

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - 2i\pi f(w) = i \int_\Omega \partial_x f + i\partial_y f(x+iy) \frac{dx\, dy}{z-w}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{\pi} \int_\Omega \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)(x+iy) \frac{dx\, dy}{x+iy-w}$$

4. Par Cauchy-Riemann, si f est holomorphe dans Ω, $\frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$.

D'où : $f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-w} dz$.

5. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\left\langle \partial_{\bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right), \varphi \right\rangle = -\left\langle \frac{1}{\pi(x+iy)}, \partial_{\bar z}\varphi \right\rangle$$

si $\operatorname{supp}\varphi \subset D(0,R)$

$$= -\int_{D(0,R)} \frac{1}{\pi(x+iy)} \times \frac{1}{2}(\partial_x\varphi + i\partial_y\varphi)_{(x,y)}\, dx\,dy$$

au sens de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{D(0,R)\setminus D(0,\varepsilon)}$

On : $$\varphi(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,R)} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_{D(0,R)} \frac{1}{2}(\partial_x\varphi + i\partial_y\varphi)_{(x,y)}\frac{dx\,dy}{x+iy}$$

D'où :

$$\left\langle \partial_{\bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right), \varphi \right\rangle = \varphi(0) - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,R)} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz$$

On : $$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,R)} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(Re^{i\theta})}{\cancel{Re^{i\theta}}}\, i\cancel{Re^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(Re^{i\theta})\,d\theta$$

Or si $\operatorname{supp}\varphi \subset D(0,R)$, $\varphi(Re^{i\theta}) = 0 \quad \forall \theta \in [0,2\pi]$.

Donc $\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,R)} \frac{\varphi(z)}{z}\,dz = 0$.

Il reste : $$\left\langle \partial_{\bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right), \varphi \right\rangle = \varphi(0,0) = \langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle$$

Donc : $$\partial_{\bar z}\left(\frac{1}{\pi z}\right) = \delta_{(0,0)}.$$