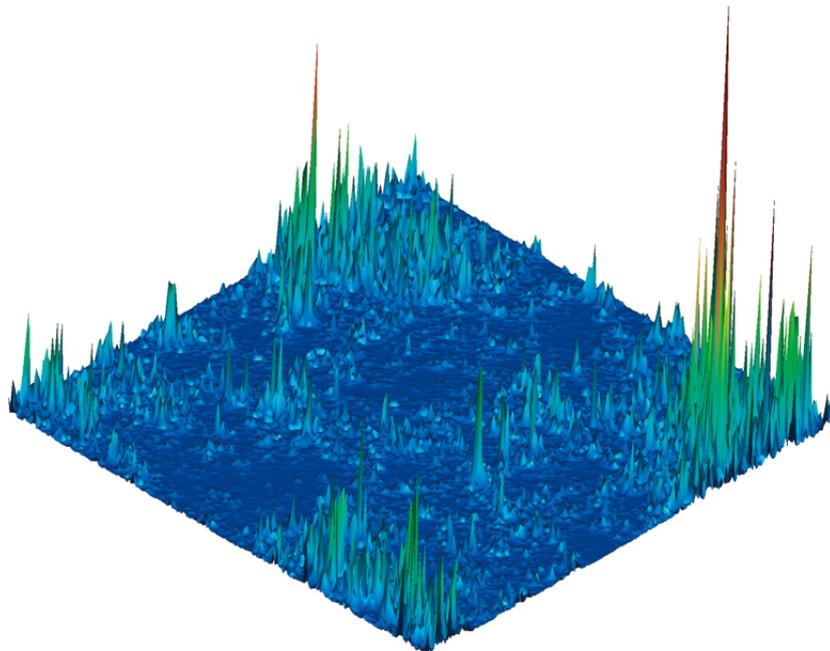

Opérateurs aléatoires et modèle d'Anderson en dimension 1

H. Boumaza



1

Bibliographie

- [1] P. Bougerol, J.Lacroix, *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*, Progr. Probab. Statist. **8**, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] E. Breuillard and T. Gelander, *On dense free subgroups of Lie groups*, J. Algebra **261**, 2003, pages 448-467.
- [3] R. Carmona, J. Lacroix, *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, Probability and Its Applications. Birkhäuser, Boston, 1990.
- [4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2007.
- [5] I.Ya. Goldsheid and G.A. Margulis, *Lyapunov indices of a product of random matrices*, Russian Math. Surveys **44**, 1989, 11-71.
- [6] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (256), Springer.
- [7] V. Jaksic, *Topics in spectral theory*, <http://www.math.mcgill.ca/jaksic/papers/pdf/spectral.pdf>
- [8] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Second Edition, Springer, Berlin, 1980.
- [9] W. Kirsch, *An invitation to random Schrödinger operators*, in Random Schroedinger operators. volume 25 de Panor. Synthèses, pages 1-119. Soc. Math. France, Paris, 2008.
- [10] F. Klopp, *Équation de Schrödinger et théorie spectrale*, <https://webusers.imj-prg.fr/frederic.klopp/cours/m2-17-18/coursEqSch-ThSpec.pdf>
- [11] S. Kotani et B. Simon, *Stochastic Schrödinger operators and Jacobi Matrices on the Strip*, Commun. Math. Phys. **119**(3), 1988, pages 403-429.
- [12] Mathieu Lewin, *Éléments de théorie spectrale : le Laplacien sur un ouvert borné*, Master. France. 2017. HAL/cel-01490197
- [13] J.P. Marco et autres, *Mathématiques L3, Analyse*, Pearson Education France.
- [14] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod.
- [15] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York-London, 1974.
- [16] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York-London, 1975.
- [17] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering Theory*, Academic Press, New York-London, 1978.
- [18] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York-London, 1977.
- [19] B. Simon, *Schrödinger semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), 3, 447-526.

Table des matières

1	Le modèle d'Anderson	1
1.1	Le phénomène physique	1
1.2	Modélisation mathématique	4
1.2.1	Rappels de mécanique quantique	4
1.2.2	Le modèle d'Anderson	5
2	Opérateurs auto-adjoints et théorème spectral	7
2.1	Opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert	7
2.1.1	Opérateurs bornés	7
2.1.2	Adjoint d'un opérateur borné	8
2.2	Opérateurs non bornés d'un espace de Hilbert	11
2.2.1	Opérateurs non bornés	11
2.2.2	Adjoint d'un opérateur non borné	14
2.3	Spectre d'un opérateur fermé	17
2.4	Rappels sur les opérateurs compacts auto-adjoints	19
2.5	Le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints	20
2.5.1	Familles spectrales	20
2.5.2	Théorème spectral	21
2.5.3	Calcul fonctionnel	22
2.5.4	Théorème de Stone	23
3	Types spectraux et dynamique	25
3.1	Types spectraux	25
3.1.1	Spectre, spectre ponctuel et mesures spectrales	25
3.1.2	Spectre essentiel et spectre discret	27
3.1.3	Spectres purement ponctuel, absolument continu et singulier continu	28
3.2	Exemples de spectres	31
3.2.1	Le laplacien discret en dimension 1	31
3.2.2	Un opérateur de Sturm-Liouville	32
3.2.3	Opérateurs de Schrödinger périodiques	33
3.2.4	Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques	34
3.3	Types spectraux et dynamique	35
3.3.1	Rappels sur la transformée de Fourier d'une mesure	36
3.3.2	Le théorème R.A.G.E.	36
4	Opérateurs aléatoires	39
4.1	Familles mesurables d'opérateurs	39
4.2	Familles ergodiques d'opérateurs	40
4.3	Le spectre presque-sûr	41
4.4	Exemples de spectres presque-sûrs	42

4.4.1	Le modèle d'Anderson discret	42
4.4.2	Un modèle d'Anderson continu quasi unidimensionnel	45
5	Exposants de Lyapunov	49
5.1	Exposant de Lyapunov dominant et théorème de Fürstenberg-Kesten	49
5.2	Suites de matrices aléatoires dans $GL_2(\mathbb{R})$	51
5.2.1	Théorème de Fürstenberg	51
5.2.2	Application au modèle d'Anderson discret $1d$ à valeurs scalaires	52
5.3	Suites de matrices aléatoires dans $Sp_N(\mathbb{R})$	54
5.3.1	Puissances extérieures	54
5.3.2	Théorème de Fürstenberg pour $GL_N(\mathbb{R})$	56
5.3.3	Théorème de Fürstenberg pour $Sp_N(\mathbb{R})$	59
5.3.4	Critère de Gold'sheid-Margulis	61
5.3.5	Application au modèle d'Anderson discret $1d$ à valeurs matricielles	64
6	Théorie de Kotani	71
6.1	Valeurs propres généralisées et spectre	71
6.1.1	Cas discret	71
6.1.2	Cas continu	75
6.2	Théorème d'Ishii-Pastur	76
6.2.1	Opérateur de Schrödinger à valeurs scalaires	76
6.2.2	Opérateur de Schrödinger à valeurs matricielles	78
6.2.3	Enoncé du théorème d'Ishii-Pastur-Kotani	82
7	Un modèle d'Anderson continu $1d$ à valeurs matricielles	85
7.1	Le modèle et son spectre presque-sûr	85
7.1.1	Matrices de transfert	86
7.2	Engendrer des sous-groupes denses dans un groupe de Lie	87
7.3	Séparation des exposants de Lyapunov	88
7.3.1	Notations	88
7.3.2	Résultats	89
7.3.3	Un lemme algébrique	89
7.3.4	L'argument de généricité	92
7.3.5	Preuve de la proposition 7.3.1	94
8	Régularité des exposants de Lyapounov et de la densité d'états intégrée	97
8.1	Régularité des exposants de Lyapunov	97
8.1.1	Mesures invariantes	97
8.1.2	Continuité	98
8.1.3	Sous-harmonicité des sommes d'exposants de Lyapounov	101
8.1.4	Régularité Höldérienne	102
8.1.5	Application au modèle d'Anderson continu à valeurs matricielles	103
8.2	La densité d'états intégrée	107
8.2.1	Existence de la densité d'états intégrée	108
8.2.2	Fonction w de Kotani	111
8.2.3	Formule de Thouless	112
8.2.4	Régularité Höldérienne	114

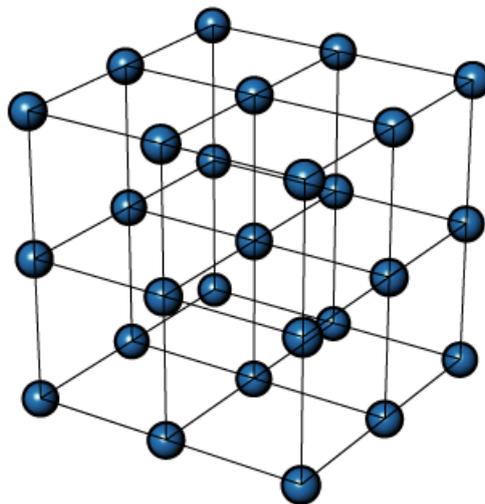
9	Localisation d'Anderson en dimension 1	117
9.1	Définitions mathématiques de la localisation	117
9.2	Localisation pour les modèles d'Anderson quasi-unidimensionnels	118
9.3	Un tour rapide de l'analyse multi-échelle	119

Chapitre 1

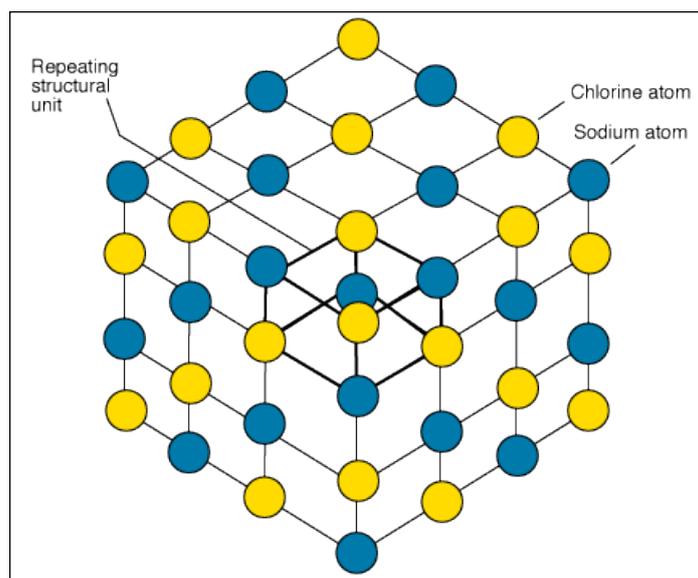
Le modèle d'Anderson

1.1 Le phénomène physique

Dans un cristal idéal, composé d'atomes rangés sur un réseau périodique, un électron peut se déplacer sans rencontrer d'obstacle : si le cristal a une énergie qui prend certaines valeurs au-dessus d'une énergie minimale, il se comporte alors comme un conducteur électrique. Ces énergies correspondent à ce que l'on appelle le spectre du cristal et prennent leurs valeurs dans des intervalles donnés, un peu comme les raies du spectre de l'atome d'hydrogène, l'épaisseur en plus.

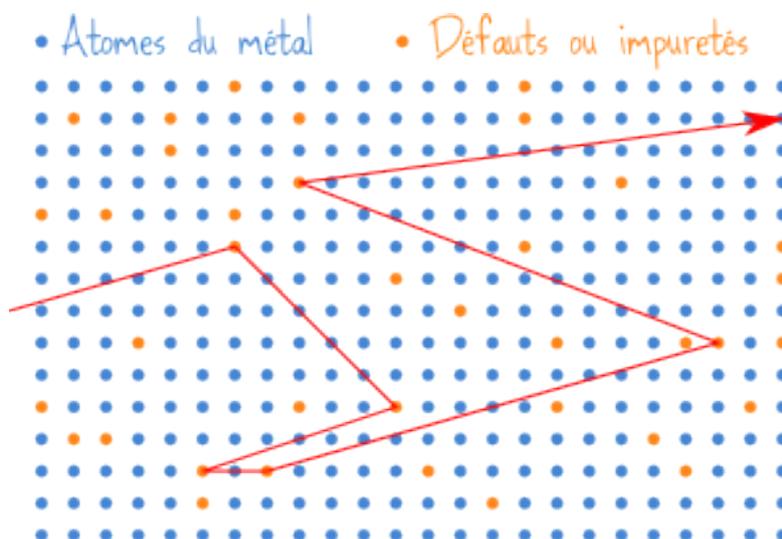


Toutefois, dans la nature, les cristaux idéaux n'existent pas, ils contiennent toujours des défauts. Ces défauts ou impuretés, peuvent être de différentes natures. Par exemple, on peut observer la présence d'atomes ionisés dans le réseau constituant le cristal ou, dans le cas où le cristal n'est pas constitué d'atomes tous identiques mais est issu d'un alliage entre plusieurs matériaux, il se peut que le réseau ne soit plus parfaitement périodique, mais qu'il y ait par-ci par-là un atome qui ne se trouve pas à la bonne place. Enfin, certains atomes sont parfois légèrement déplacés par rapport à leur position idéale sur le réseau périodique. Dans tous ces cas, les propriétés physiques du cristal sont modifiées.



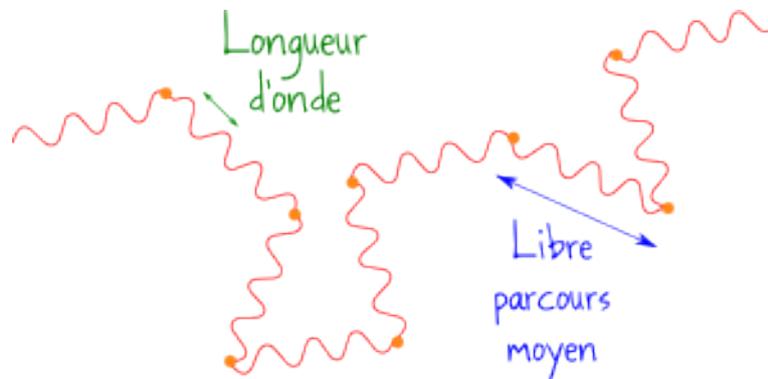
Comment peut-on alors modéliser ces impuretés dans un cristal et leur impact sur le transport électronique ? Le premier à avoir proposé un modèle expliquant les effets du désordre sur le comportement quantique des électrons dans un cristal imparfait est le physicien américain Philip Warren Anderson dans un article fondateur de 1958. En introduisant des termes aléatoires dans l'équation de Schrödinger (équation qui régit le comportement quantique des électrons dans le cristal), deux nouveaux phénomènes furent mis en évidence : la localisation d'Anderson et la transition d'Anderson pour les cristaux tridimensionnels. Ces découvertes lui vaudront en 1977 le prix Nobel de physique, conjointement à Nevill Mott et John van Vleck.

Le phénomène de localisation d'Anderson peut s'énoncer ainsi : à une énergie du spectre fixée, au-delà d'une certaine quantité de désordre dans le cristal, l'électron va cesser de s'y déplacer librement et va rester confiné dans une région localisée. Le cristal cesse d'être un conducteur pour devenir un isolant. Pour expliquer ce phénomène, il faut se rappeler qu'en mécanique quantique, un électron peut tout aussi bien être vu comme une particule dotée d'une masse que comme une onde : c'est la dualité onde-corpuscule découverte par Louis De Broglie en 1924. Alors, à chaque collision de l'électron avec une impureté du cristal, son onde associée se disperse.



On appelle "libre parcours moyen" la distance moyenne parcourue par l'électron entre deux collisions. On pourrait s'attendre à ce que lorsque le désordre augmente, le libre parcours

moyen diminue continûment. Mais ce n'est pas qui se produit. Après une certaine quantité critique d'impuretés, la diffusion de l'électron s'arrête d'un coup. Ce brusque arrêt a lieu lorsque le libre parcours moyen devient plus court que la longueur d'onde de l'électron : si l'onde est dispersée avant même une première période, on ne peut plus vraiment la considérer comme une onde...



Le phénomène de localisation dépasse le cadre de la mécanique quantique. On peut l'observer dans d'autres situations où une onde se propage dans un milieu désordonné. Cela peut être le cas d'une onde lumineuse, de micro-ondes ou d'ondes acoustiques.

Du point de vue mathématique, la localisation d'Anderson est à présent un phénomène relativement bien compris. Les premières preuves mathématiquement rigoureuses remontent aux années 70 avec les travaux de Goldsheid, Molchanov et Pastur, puis ceux de Kunz et Souillard. Ces premiers résultats rigoureux portaient tous sur des modèles de cristaux unidimensionnels. A partir de là, l'étude des opérateurs aléatoires est devenu un domaine de recherche très actif. Dès 1983, Fröhlich et Spencer, en introduisant l'analyse multi-échelles, parvinrent à obtenir une première preuve de la localisation d'Anderson pour des cristaux de dimension arbitraire, lorsque ceux-ci ont une énergie proche de leur énergie minimale. Cette technique mathématique sera ensuite très utilisée pour obtenir différents résultats liés au modèle d'Anderson et à d'autres modèles de la physique de la matière condensée. En 2001, Damanik, Sims et Stolz ont prouvé que la localisation d'Anderson avait lieu à toutes les énergies du spectre pour un cristal unidimensionnel faiblement désordonné régit par le modèle d'Anderson, achevant ainsi l'étude en dimension 1 de ce modèle. Il reste aujourd'hui à démontrer une conjecture importante et très difficile qui affirme que la localisation d'Anderson a aussi lieu à toutes les énergies pour un cristal bidimensionnel désordonné. En dimension 2 et supérieure, nous savons uniquement que la localisation d'Anderson se manifeste pour les énergies proches de l'énergie minimale, nous ne savons rien pour les autres énergies.

Le deuxième phénomène découvert après l'introduction du modèle d'Anderson est l'existence d'une transition entre un état d'isolant et un état de conducteur pour un cristal tridimensionnel à une certaine énergie critique, et ce quel que soit la quantité d'impuretés dans le cristal. Pour les cristaux unidimensionnels et bidimensionnels, cette transition n'existe pas : à toute énergie, le phénomène de localisation d'Anderson apparaît pour un désordre suffisant. Précisons que cela est bien démontré en dimension 1 mais que cela reste une conjecture en dimension 2. Les recherches mathématiques sur la preuve de cette transition d'Anderson sont très actives, mais n'ont à ce jour pas encore aboutit à des résultats rigoureux pour le modèle d'Anderson. Des premiers résultats de Germinet, Klein et Schencker ou d'Aizenmann et Warzel ont mis en évidence cette transition pour d'autres modèles aléatoires, mais les techniques employées ne semblent pas encore suffisantes pour obtenir une preuve rigoureuse de l'existence de la transition d'Anderson en dimension supérieure à 3.

Il convient de préciser ici que le modèle mathématique d'Anderson ne tient pas compte des interactions entre les électrons qui se déplacent dans le cristal et ceux associés aux atomes

qui constituent le réseau. A priori, les électrons qui y circulent interagissent avec les électrons du cristal et ces derniers sont eux-mêmes modifiés par la présence des premiers. La prise en compte de ces interactions pourrait conduire à des résultats très différents de ceux cités plus haut, comme par exemple l'apparition de la transition isolant-conducteur en dimension 1 et 2 et pas uniquement en dimension supérieure à 3.

1.2 Modélisation mathématique

1.2.1 Rappels de mécanique quantique

Rappelons tout d'abord qu'en mécanique quantique, l'état d'un système de N particules est décrit par sa fonction d'onde

$$\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ (x, t) \mapsto \psi(x, t) \end{array} ,$$

$\psi \in L^2(\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R})$. La densité de présence du système à l'instant t est alors donnée par $x \mapsto |\psi(x, t)|^2$, i.e., si A est un borélien de \mathbb{R}^{3N} ,

$$P((x_1, \dots, x_N) \in A) = \int_A |\psi(x_1, \dots, x_N, t)|^2 dx_1 \cdots dx_N.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^{3N}} |\psi(x_1, \dots, x_N, t)|^2 dx_1 \cdots dx_N = 1.$$

L'évolution du système est alors décrite à travers l'équation de Schrödinger comme nous l'avons déjà vu au chapitre précédent. Si l'énergie classique du système est donnée par l'hamiltonien $H(x_1, \dots, x_N, p_1, \dots, p_N)$ on définit par quantification (de Weyl) l'opérateur auto-adjoint :

$$\hat{H} = H(x_1, \dots, x_N, -i\hbar\partial_{x_1}, \dots, -i\hbar\partial_{x_N}).$$

Par exemple, si $H(x, p) = \frac{|p|^2}{2m} + V(x_1, \dots, x_N)$ alors $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$. Le laplacien correspond donc à l'énergie cinétique du système et l'opérateur de multiplication par V à l'énergie potentiel du système soit son interaction avec son milieu.

Par ailleurs, toute quantité associée au système qui peut être mesurée est appelée une observable. Par exemple, l'énergie en est une, mais aussi la position x d'une particule, même si on préfère à cette dernière la probabilité d'être dans un borélien A définie plus haut.

On peut résumer les postulats de la mécanique quantique de la façon suivante :

1. L'espace des configurations d'un système quantique est un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$.
2. Les états possibles pour le système sont les éléments de \mathcal{H} de norme 1.
3. Une observable \mathfrak{h} d'un système quantique est représentée par un opérateur linéaire auto-adjoint H sur \mathcal{H} .
4. Si le système est dans l'état ψ , la valeur de la mesure \mathfrak{h} à l'instant t est le nombre réel :

$$\mathbb{E}_\psi = (\psi|H\psi).$$

5. Puisque cette espérance n'est pas toujours finie, en général H est seulement défini sur un sous-espace dense $D(H)$ de \mathcal{H} .

1.2.2 Le modèle d'Anderson

On souhaite étudier l'évolution d'un électron dans un cristal. Si le cristal est parfait, les atomes sont distribués sur un réseau périodique, par exemple \mathbb{Z}^d . Au point $x \in \mathbb{R}^d$, l'électron ressent un potentiel de la forme $qf(x-i)$ dû à un atome de charge q situé en $i \in \mathbb{Z}^d$. Le potentiel total ressenti par l'électron dans le cristal est donc

$$V(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} qf(x-i).$$

Il y a plusieurs façons de modéliser le désordre dans un cristal. Nous commençons par présenter l'idée d'Anderson. Pour modéliser les imperfections dans le cristal on peut considérer que la charge des atomes du cristal est une variable aléatoire. Cela conduit à considérer un potentiel ressenti au point x de la forme

$$V_\omega(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} q_i(\omega)f(x-i).$$

où les q_i sont des variables aléatoires *i.i.d.* sur une espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . A priori les q_i ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, mais on verra dans la suite que pour effectuer l'étude mathématique de l'opérateur de Schrödinger associé à ce potentiel, il peut être plus simple de considérer le cas où les q_i ont une loi continue.

Cette idée conduit à introduire une famille aléatoire d'opérateurs de Schrödinger :

$$\forall \omega \in \Omega, H_\omega^A = -\Delta_d + \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} q_i(\omega)f(x-i),$$

agissant sur l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^d)$, où f est une fonction à support dans le cube unité $[0, 1]^d$.

La famille d'opérateurs $\{H_\omega^A\}_{\omega \in \Omega}$ est appelée le **modèle d'Anderson continu**.

En particulier en dimension $d = 1$, pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $u \in H^2(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(H_\omega^A u)(x) = -u''(x) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} q_i(\omega)f(x-i)u(x).$$

L'analogie discret de ce modèle est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, (h_\omega u)_n = - \sum_{|m-n|=1} u_m + q_n(\omega)u_n,$$

agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. En particulier pour $d = 1$, pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(h_\omega u)_n = -(u_{n-1} + u_{n+1}) + q_n(\omega)u_n.$$

Il y a d'autres façons de modéliser l'imperfection du cristal. Par exemple, on peut considérer le modèle de déplacement aléatoire :

$$\forall \omega \in \Omega, H_\omega^D = -\Delta_d + \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} f(x-i-x_i(\omega)),$$

où les $x_i(\omega) \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^d$ sont des variables aléatoires *i.i.d.*. Pour ce type de modèle on supposera en général qu'elles suivent une loi de Poisson.

Une autre manière de concevoir le désordre dans le cristal est de considérer les modèles quasi-périodiques. Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\phi \in \mathbb{T}$ et $Q : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, q_{\phi, \alpha}(x) = Q(\phi + \alpha x).$$

Ce potentiel est appelé potentiel quasi-périodique de fréquence α et de phase ϕ . On définit alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall \phi \in \mathbb{T}, H_{\alpha, \phi} = -\frac{d^2}{dx^2} + q_{\alpha, \phi}(x),$$

agissant sur $H^2(\mathbb{R})$. De même dans le cas discret : $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall \phi \in \mathbb{T}$, $\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$(h_{\alpha, \phi} u)_n = -(u_{n-1} + u_{n+1}) + q_{\alpha, \phi}(n)u_n.$$

Chapitre 2

Opérateurs auto-adjoints et théorème spectral

Dans tout ce cours, $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ désigne un espace de Hilbert sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} . Par convention, lorsque $(\cdot|\cdot)$ sera un produit hermitien, il sera semi-linéaire à droite.

2.1 Opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert

2.1.1 Opérateurs bornés

Nous commençons par définir l'espace des opérateurs bornés entre espaces vectoriels normés et nous définissons ensuite plusieurs topologies sur cet espace.

Définition 2.1.1. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des espaces vectoriels normés, un opérateur borné de E dans F est une application linéaire continue $T : E \rightarrow F$, donc, telle que

$$\exists C > 0, \forall u \in E, \|Tu\|_F \leq C \|u\|_E.$$

Notation. On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs bornés de E dans F . Lorsque $E = F$, on notera $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur lequel on introduit la norme,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_E=1} \|Tu\|_F.$$

La topologie induite par cette norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ est appelée *topologie uniforme des opérateurs*. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)})$ est aussi un espace de Banach. De plus, la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, E)}$ est une norme d'algèbre sur $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ et, plus généralement, si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des espaces vectoriels normés et si $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(E, G)$ et

$$\|T_2 \circ T_1\|_{\mathcal{L}(E, G)} \leq \|T_2\|_{\mathcal{L}(F, G)} \|T_1\|_{\mathcal{L}(E, F)}.$$

Notation. Dans toute la suite, nous noterons $T_2 T_1$ la composée $T_2 \circ T_1$ de deux opérateurs $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$.

Nous introduisons maintenant deux topologies plus faibles sur $\mathcal{L}(E, F)$. Tout d'abord, la *topologie forte des opérateurs*. C'est la plus petite topologie rendant continues les applications $ev_u : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F$, $ev_u(T) = Tu$. Pour cette topologie, une suite d'opérateurs bornés $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

converge vers un opérateur borné si et seulement si, pour tout $u \in E$, $\|T_n u - Tu\|_F \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On notera alors $s - \lim T_n = T$.

La seconde topologie est la *topologie faible des opérateurs*. Nous pourrions la définir pour E et F des espaces de Banach quelconques, mais dans la suite nous nous restreindrons aux opérateurs bornés de $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$ dans lui-même, nous supposons donc que $E = F = \mathcal{H}$. Alors la topologie faible sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est la plus petite topologie rendant continues les applications $ev_{u,v} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$, $ev_{u,v}(T) = (Tu|v)$. Pour cette topologie, une suite d'opérateurs bornés $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un opérateur borné si et seulement si, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(T_n u|v) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (Tu|v)$ dans \mathbb{C} .

On notera alors $w - \lim T_n = T$.

La topologie faible des opérateurs est plus faible que la topologie forte des opérateurs, elle-même plus faible que la topologie uniforme des opérateurs. Les exemples suivants illustrent les différences entre ces topologies sur $\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$.

Exemple 2.1.2. Soit $T_n : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $T_n(x_0, x_1, \dots) = (\frac{1}{n}x_0, \frac{1}{n}x_1, \dots)$. Alors $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, l'opérateur nul.

Exemple 2.1.3. Soit $S_n : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $S_n(x_0, x_1, \dots) = (0, \dots, 0, x_n, x_{n+1}, \dots)$. Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fortement vers 0, mais pas uniformément.

Exemple 2.1.4. Soit $W_n : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $W_n(x_0, x_1, \dots) = (0, \dots, 0, x_0, x_1, \dots)$ avec n fois 0 au début de la suite. Alors $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0, mais pas fortement ni uniformément.

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des opérateurs bornés entre espaces de Hilbert. Nous donnons, dans ce cadre hilbertien, une caractérisation de la norme d'opérateur.

Proposition 2.1.5. Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 deux espaces de Hilbert. Soit $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un opérateur borné. Alors,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} = \sup\{|(Tu|v)_{\mathcal{H}_2}| \mid \|u\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1 \text{ et } \|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1\}.$$

Démonstration : Notons S le membre de droite de l'égalité. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|(Tu|v)| \leq \|Tu\|_{\mathcal{H}_2} \|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} \|u\|_{\mathcal{H}_1} \|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$$

lorsque $\|u\|_{\mathcal{H}_1} \leq 1$ et $\|v\|_{\mathcal{H}_2} \leq 1$. Donc, $S \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$. Réciproquement, soit M un réel positif; supposons que $S \leq M$. Alors, pour tout $u \in \mathcal{H}_1$, $\|Tu\|_{\mathcal{H}_2} \leq M\|u\|_{\mathcal{H}_1}$. En effet, si $u = 0$ ou $Tu = 0$, l'inégalité est vérifiée. Sinon, $u' = u/\|u\|_{\mathcal{H}_1}$ et $v' = Tu/\|Tu\|_{\mathcal{H}_2}$ sont de norme 1 et, comme $S \leq M$, $|(Tu'|v')| \leq M$. Or, $|(Tu'|v')| = \|Tu\|_{\mathcal{H}_2}/\|u\|_{\mathcal{H}_1}$, donc on a bien $\|Tu\|_{\mathcal{H}_2} \leq M\|u\|_{\mathcal{H}_1}$. Par définition de $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)}$, on obtient $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} \leq S$.

□

2.1.2 Adjoint d'un opérateur borné

Nous allons maintenant définir l'adjoint d'un opérateur borné qui généralise à la dimension quelconque la transposée d'une matrice réelle ou la transconjugée d'une matrice complexe.

Proposition 2.1.6. Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que

$$\forall u \in \mathcal{H}, \forall v \in \mathcal{H}, (Tu|v) = (u|T^*v). \tag{2.1}$$

Démonstration : Soit $v \in \mathcal{H}$. Alors, $\ell_v : u \mapsto (Tu|v)$ est une forme linéaire continue sur \mathcal{H} . En effet, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et on utilise le caractère borné de T . Par

le théorème de Riesz de représentation des formes linéaires continues, il existe un unique vecteur $w \in \mathcal{H}$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\ell_v(u) = (u|w)$. Posons $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $T^*v = w$.

T^* est linéaire. En effet, si $v_1, v_2 \in \mathcal{H}$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, alors soit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ et $w_1 = T^*(v_1)$, $w_2 = T^*(v_2)$, $T^*(v) = w$. Alors,

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{H}, (u|w) &= (Tu|v) = (Tu|\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ &= \bar{\lambda}_1 (Tu|v_1) + \bar{\lambda}_2 (Tu|v_2) \\ &= \bar{\lambda}_1 (u|w_1) + \bar{\lambda}_2 (u|w_2) \\ &= (u|\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2). \end{aligned}$$

Donc, $w - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$ et $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ et T^* est linéaire.

T^* est borné. En effet, soient $u, v \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ et $\|v\|_{\mathcal{H}} \leq 1$. Alors,

$$|(u|T^*v)| = |(Tu|v)| \leq \|Tu\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Donc, en prenant $u = \frac{T^*v}{\|T^*v\|_{\mathcal{H}}}$, pour tout $v \in \mathcal{H}$, $\|v\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ et $T^*v \neq 0$, $\|T^*v\|_{\mathcal{H}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Si $v \in \mathcal{H}$ est tel que $T^*v = 0$, l'inégalité est encore vérifiée. On obtient donc $\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$ et T^* est borné.

Enfin, pour l'unicité, si T_1^* et T_2^* vérifient (2.1), alors, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(u|(T_1^* - T_2^*)v) = 0$, donc $T_1^* - T_2^* = 0$.

□

Définition 2.1.7 (Adjoint.). *L'opérateur borné $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelé adjoint de l'opérateur T .*

Exemple 2.1.8. *Pour tout espace de Hilbert \mathcal{H} , $\text{Id}_{\mathcal{H}}^* = \text{Id}_{\mathcal{H}}$.*

Nous énonçons les premières propriétés vérifiées par l'adjoint d'un opérateur borné.

Proposition 2.1.9 (Propriétés algébriques de l'adjoint.). *Soient $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,*

1. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;
2. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$;
3. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$;
4. $(T^*)^* = T$;
5. si T a un inverse borné T^{-1} , T^* a aussi un inverse borné et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Démonstration : Les deux premiers points proviennent de la semi-linéarité à droite du produit scalaire. Pour le troisième point, on écrit, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(T_1 T_2 u|v) = (T_2 u|T_1^* v) = (u|T_2^* T_1^* v)$. Le quatrième point s'obtient en remarquant que, dans (2.1), les vecteurs u et v jouent le même rôle et $(Tu|v) = (u|T^*v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}$ si et seulement si $(T^*u|v) = (u|Tv)$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}$ en passant aux conjugués. Enfin, pour le dernier point, de $TT^{-1} = I = T^{-1}T$ on déduit par passage à l'adjoint que $T^*(T^{-1})^* = I^* = I = I^* = (T^{-1})^* T^*$.

□

Proposition 2.1.10 (Propriétés métriques de l'adjoint.). *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors,*

1. $\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$;
2. $\|T^* T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2$.

Démonstration : D'après la démonstration de la proposition 2.1.6, $\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Puis, en appliquant cette inégalité à l'opérateur borné T^* et en utilisant le fait que $(T^*)^* = T$, on obtient bien $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, ce qui prouve le premier point. Pour le second point, on a tout d'abord, $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2$. Réciproquement, si $u \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$,

$$\|Tu\|_{\mathcal{H}}^2 = (Tu|Tu) = (T^*Tu|u) \leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})},$$

donc $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^2 \leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

□

Proposition 2.1.11 (Propriétés géométriques de l'adjoint.). Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors,

1. $\text{Ker } T^* = (\text{Im } T)^\perp$ et $(\text{Ker } T^*)^\perp = \overline{\text{Im } T}$;
2. si $F \subset \mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel stable par T , alors F^\perp est stable par T^* .

Démonstration : u appartient à $(\text{Im } T)^\perp$ si et seulement si, pour tout $v \in \mathcal{H}$, $(u|Tv) = 0$, ce qui équivaut à ce que, pour tout $v \in \mathcal{H}$, $(T^*u|v) = 0$. C'est équivalent à $T^*u = 0$, soit encore $u \in \text{Ker } T^*$. La seconde propriété provient des propriétés sur les espaces orthogonaux dans les espaces de Hilbert.

Pour le second point, soit $v \in F^\perp$ et $u \in F$. Alors $Tu \in F$, donc $(T^*v|u) = (v|Tu) = 0$. Donc $T^*v \in F^\perp$.

□

Définition 2.1.12. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est dit auto-adjoint lorsque $T = T^*$.

Les opérateurs auto-adjoints sont la généralisation des matrices symétriques à la dimension infinie. Ils jouent un rôle majeur en analyse fonctionnelle et en physique mathématique. Nous allons démontrer un théorème de structure sur ces opérateurs qui affirme que tout opérateur auto-adjoint est diagonalisable, en un sens à préciser en dimension infinie. Un premier exemple d'opérateur auto-adjoint est celui de projecteur orthogonal.

Définition 2.1.13. Un opérateur $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est appelé un projecteur lorsque $P^2 = P$. Si de plus $P^* = P$, on dit que P est un projecteur orthogonal.

On remarque que l'image d'un projecteur est un sous-espace fermé sur lequel P agit comme l'identité. Si de plus P est orthogonal, P agit comme l'opérateur nul sur $(\text{Im } T)^\perp$. Le théorème de projection sur les sous-espaces fermés dans les espaces de Hilbert nous assure alors qu'il y a une bijection entre les projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et les sous-espaces fermés de \mathcal{H} .

Exemple 2.1.14. (Opérateur de multiplication). Soit (X, μ) un espace mesuré σ -fini et soit $\mathcal{H} = L^2(\mu)$. Si $\varphi \in L^\infty(\mu)$, on définit l'opérateur de multiplication par φ , $M_\varphi : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $M_\varphi u = \varphi u$.

Alors M_φ est dans $\mathcal{L}(L^2(\mu))$ et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Ici, $\|\varphi\|_\infty$ désigne le supremum μ -essentiel, $\|\varphi\|_\infty = \inf\{c > 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |\varphi(x)| > c\}) = 0\}$. Donc, quitte à changer de représentant dans la classe de φ , on peut supposer que φ est une fonction bornée.

Puis, comme $\|\varphi u\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty \|u\|_2$, M_φ est un opérateur borné et $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme μ est σ -finie, il existe un ensemble mesurable A tel que $0 < \mu(A) < +\infty$ tel que $|\varphi(x)| \geq \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ pour tout $x \in A$. Si on pose $u = \mu(A)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_A$, alors $u \in L^2(\mu)$ et $\|u\|_2 = 1$. Donc $\|M_\varphi\|^2 \geq \|\varphi u\|_2^2 = \mu(A)^{-1} \int_A |\varphi|^2 d\mu \geq (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2$. En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$.

On a de plus, pour toute $\varphi \in L^\infty(\mu)$, $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$ où $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}$ pour tout x dans X . En particulier, si φ est à valeurs réelles, $M_\varphi^* = M_\varphi$ et M_φ est auto-adjoint.

Pour les opérateurs bornés auto-adjoints, la proposition 2.1.5 peut être raffinée.

Proposition 2.1.15. *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint. Alors, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}$ et*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup\{|(Tu|u)| \mid \|u\|_{\mathcal{H}} = 1\}.$$

Démonstration : Soit S le membre de droite de l'égalité. D'après la proposition 2.1.5, $S \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

Pour démontrer l'autre inégalité, on commence par démontrer que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}$. En effet, comme $T = T^*$, $(Tu|u) = (u|Tu) = \overline{(Tu|u)}$ et $(Tu|u) \in \mathbb{R}$. Puis, en utilisant l'identité de polarisation, on a

$$\forall u, v \in \mathcal{H}, \operatorname{Re}(Tu|v) = \frac{1}{4}((T(u+v)|u+v) - (T(u-v)|u-v)).$$

Or, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $|(Tu|u)| \leq S\|u\|^2$ donc, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$,

$$|\operatorname{Re}(Tu|v)| \leq \frac{S}{4}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2).$$

Puis par l'identité du parallélogramme, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $|\operatorname{Re}(Tu|v)| \leq \frac{S}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. Donc, si on suppose que $\|u\| \leq 1$ et $\|v\| \leq 1$, on obtient $|\operatorname{Re}(Tu|v)| \leq S$. Quitte à remplacer v par $e^{i\theta}v$, on obtient que, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $|(Tu|v)| \leq S$. Alors, par la proposition 2.1.5, $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq S$, ce qui termine la démonstration. □

Nous terminons cette section par un résultat qui ouvre la voie au formalisme des opérateurs non bornés.

Théorème 2.1.16 (Hellinger-Toeplitz.). *Soit $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur tel que, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$, $(u|Tv) = (Tu|v)$. Alors $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Démonstration : Par le théorème du graphe fermé, il suffit de démontrer que $\Gamma(T)$, le graphe de T , est fermé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{H} qui converge vers $u \in \mathcal{H}$ et telle que $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $v \in \mathcal{H}$. Il nous suffit de démontrer que $v = Tu$. Or, pour tout $w \in \mathcal{H}$,

$$(w|v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (w|Tu_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tw|u_n) = (Tw|u) = (w|Tu),$$

donc $v = Tu$. □

Ce résultat affirme donc qu'il ne peut y avoir d'opérateur non borné qui soit défini sur \mathcal{H} tout entier et qui soit auto-adjoint (ou symétrique en général). Cela pose problème en mécanique quantique où l'on souhaite définir des opérateurs comme l'énergie (qui fait intervenir une dérivée) qui sont non bornés tout en étant symétriques au sens où $(u|Tv) = (Tu|v)$.

2.2 Opérateurs non bornés d'un espace de Hilbert

2.2.1 Opérateurs non bornés

Pour contourner le résultat de Hellinger-Toeplitz, on va définir les opérateurs non bornés sur des sous-espaces de \mathcal{H} . Un tel sous-espace appelé domaine de l'opérateur T sera supposé dense dans \mathcal{H} .

Définition 2.2.1. Un opérateur non borné T sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est une application linéaire $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ où $D(T)$ est un sous-espace vectoriel dense dans \mathcal{H} , appelé domaine de T .

Exemple 2.2.2. On revient à l'opérateur de multiplication. Soit (X, μ) un espace mesuré σ -fini et soit $\mathcal{H} = L^2(\mu)$. On suppose à présent φ seulement mesurable et non nulle presque partout et on définit l'opérateur de multiplication par φ via

$$D(M_\varphi) = \{u \in L^2(\mu) \mid u\varphi \in L^2(\mu)\} \subset L^2(\mu)$$

et $M_\varphi : D(M_\varphi) \rightarrow L^2(\mu)$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $M_\varphi u = \varphi u$.

Alors, $D(M_\varphi)$ est dense dans $L^2(\mu)$. De même, l'image de M_φ , $M_\varphi(D(M_\varphi))$ est aussi dense dans $L^2(\mu)$.

Exemple 2.2.3. On souhaite étudier directement le problème de Sturm-Liouville suivant en terme d'opérateurs :

$$\begin{cases} -u'' + qu &= \lambda u, & u \in C^2([0, 1]) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour cela on pose $T : u \mapsto -u'' + qu$ qui est linéaire, mais qui n'est pas défini sur tout $L^2([0, 1])$. On introduit alors

$$D(T) = \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

qui est dense dans $L^2([0, 1])$ et on regarde T comme un opérateur sur $L^2([0, 1])$ de domaine $D(T)$.

Définition 2.2.4. Le graphe d'un opérateur non borné $(T, D(T))$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$

$$\Gamma(T) = \{(u, Tu) \mid u \in D(T)\}.$$

On peut alors définir une classe d'opérateurs non bornés dont les propriétés ne seront pas trop éloignées des opérateurs bornés, celle des opérateurs fermés.

Définition 2.2.5. On dit qu'un opérateur non borné $(T, D(T))$ est fermé si son graphe $\Gamma(T)$ est fermé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Remarque 2.2.6. En d'autres termes, $(T, D(T))$ est fermé si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D(T)$ qui converge vers $u \in \mathcal{H}$ et telle que (Tu_n) converge vers $v \in \mathcal{H}$, alors $u \in D(T)$ et $Tu = v$.

Remarque 2.2.7. Par le théorème du graphe fermé, si $D(T) = \mathcal{H}$, alors $(T, D(T))$ est fermé si et seulement si il est borné.

L'opérateur de Sturm-Liouville présenté plus haut n'est pas fermé. En effet, on peut montrer que la limite u dans $L^2([0, 1])$ d'une suite dans $D(T)$ n'est pas nécessairement C^2 . Le domaine $D(T)$ dans cet exemple est trop petit pour que l'opérateur soit fermé. En considérant comme domaine

$$\{u \in L^2([0, 1]) \mid u'' \in L^2([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\}$$

où la dérivée u'' est prise au sens des distributions (et où on utilise l'injection de Sobolev pour donner un sens aux valeurs aux bord), on définit alors un opérateur fermé. Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 2.2.8. Soient $(S, D(S))$ et $(T, D(T))$ deux opérateurs non bornés. On dit que T prolonge S (ou est une extension de S) et on note $S \subset T$ lorsque $D(S) \subset D(T)$ et $T|_{D(S)} = S$.

On dit qu'un opérateur non borné est fermable s'il admet une extension fermée.

Remarque 2.2.9. Un opérateur T est fermable si et seulement si pour toute suite (u_n) dans $D(T)$ telle que $u_n \rightarrow 0$ et $Tu_n \rightarrow v \in \mathcal{H}$ on a alors $v = 0$.

- Proposition 2.2.10.**
1. $(T, D(T))$ est fermable si et seulement si $\overline{\Gamma(T)} \cap (\{0\} \times \mathcal{H}) = \{(0, 0)\}$.
 2. Si $(T, D(T))$ est fermable, alors il admet une plus petite extension fermée dont le graphe est $\overline{\Gamma(T)}$.
 3. Cette plus petite extension fermée est appelée la fermeture de $(T, D(T))$ et elle est notée \overline{T} . On a alors : $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$.

Démonstration : Si T est fermable, il existe S fermé tel que $T \subset S$ soit encore $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$ avec $\Gamma(S)$ fermé. D'où, $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$. Alors,

$$\overline{\Gamma(T)} \cap (\{0\} \times \mathcal{H}) \subset \Gamma(S) \cap (\{0\} \times \mathcal{H}) = \{(u, Su) \mid u = 0\} = \{(0, 0)\}$$

car S est linéaire.

Réciproquement, si $\overline{\Gamma(T)} \cap (\{0\} \times \mathcal{H}) = \{(0, 0)\}$, alors $p_1 : \overline{\Gamma(T)} \rightarrow \mathcal{H}$, $(u, v) \mapsto u$ est injective car son noyau est $\{(0, 0)\}$. Elle est donc bijective sur son image. Notons $D(\overline{T})$ son image et posons pour $u \in D(\overline{T})$, $(u, \overline{T}u) = p_1^{-1}(u)$. Alors, $D(\overline{T})$ est dense car $\overline{\Gamma(T)}$ est fermé et p_1 est linéaire continue et $\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}$ est fermé, i.e. T est fermable.

Enfin, si S est une extension fermée de T , alors $\Gamma(T) \subset \Gamma(S)$ et comme $\Gamma(S)$ est fermé, $\overline{\Gamma(T)} \subset \Gamma(S)$, i.e. $\overline{T} \subset S$.

□

Définition 2.2.11. Soit T un opérateur fermé. Un ensemble $D \subset D(T)$ est appelé un coeur pour T si $\overline{T|_D} = T$.

Exemple 2.2.12. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $(a_\alpha)_{0 \leq |\alpha| \leq m}$ une famille de fonctions dans $C^\infty(\Omega)$. On se place dans $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ et on pose,

$$D(T) = C_0^\infty(\Omega) \text{ et } \forall u \in D(T), Tu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha u.$$

Soit (u_n) une suite dans \mathcal{H} qui converge vers 0 et telle que (Tu_n) converge vers v dans \mathcal{H} . On veut montrer que $v = 0$. Pour cela on va utiliser le lemme de Dubois-Reymond. Soit $\varphi \in D(T)$. La convergence dans L^2 impliquant celle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} v \varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} Tu_n \varphi.$$

Or,

$$\int_{\Omega} Tu_n \varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} a_\alpha \partial^\alpha u_n \varphi$$

et comme φ est à support compact,

$$\int_{\Omega} a_\alpha \partial^\alpha u_n \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_n a_\alpha \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} u_n (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi)$$

par IPP. Comme (u_n) tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ la suite d'intégrales obtenues tend aussi vers 0 (soit dans \mathcal{D}' , soit par Cauchy-Schwarz). Finalement, $\int_{\Omega} v \varphi = 0$ et $v = 0$. Donc T est fermable.

Exemple 2.2.13. Pour $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ et $D(T) = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est non nulle, on pose,

$$\forall u \in D(T), Tu = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx \right) f.$$

Alors $(T, D(T))$ n'est pas fermable.

En effet, soit $\rho \in D(T)$ d'intégrale égale à 1 et posons pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{n} \rho(\frac{\cdot}{n})$. Alors, pour tout n , u_n est d'intégrale égale à 1 et $Tu_n = f$. Mais on a aussi $\|u_n\|^2 \rightarrow 0$ alors que $(u_n, Tu_n) \rightarrow (0, f) \neq (0, 0)$.

2.2.2 Adjoint d'un opérateur non borné

Soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné. Tout comme dans le cas borné, on veut pouvoir définir un opérateur $(T^*, D(T^*))$ tel que

$$\forall u \in D(T), \forall v \in D(T^*), (Tu|v) = (u|T^*v).$$

La première chose à faire est de bien définir $D(T^*)$.

Définition 2.2.14. Soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné. On pose

$$D(T^*) = \{v \in \mathcal{H}, \mid \exists C > 0, \forall u \in D(T), |(Tu|v)| \leq C\|u\|\}.$$

Puis, pour $v \in D(T^*)$ on pose $T^*v = w$ où $w \in \mathcal{H}$ est l'unique vecteur tel que

$$\forall u \in D(T), (Tu|v) = (u|w).$$

En effet, w existe bien par le théorème de représentation de Riesz des formes linéaires continues dans un espace de Hilbert qui s'applique ici car, $D(T)$ étant dense, toute forme linéaire continue sur $D(T)$ peut s'étendre à une forme linéaire continue sur \mathcal{H} tout entier.

Lemme 2.2.15. Avec les notations de la définition 2.2.14 et si $R : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}, (u, v) \mapsto (-v, u)$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$), alors

$$\Gamma(T^*) = \{(v, T^*v) \mid v \in D(T^*)\} = (R(\Gamma(T)))^\perp.$$

Démonstration : Soit $(v, w) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Alors,

$$(v, w) \in (R(\Gamma(T)))^\perp \Leftrightarrow \forall u \in D(T), ((v, w)|R((u, Tu))) = 0.$$

Soit encore, $((v, w)|(-Tu, u)) = 0 \Leftrightarrow -(v|Tu) + (w|u) = 0$. Donc,

$$(v, w) \in (R(\Gamma(T)))^\perp \Leftrightarrow \forall u \in D(T), (u|w) = (Tu|v)$$

d'où le résultat. □

Lemme 2.2.16. Avec les notations de la définition 2.2.14, $D(T^*)$ est dense dans \mathcal{H} si et seulement si T est fermable.

Démonstration : On va utiliser que T est fermable si et seulement si $\overline{\Gamma(T)} \cap (\{0\} \times \mathcal{H}) = \{(0, 0)\}$. Tout d'abord, d'après le lemme 2.2.15 et puisque $R^2 = -Id_{\mathcal{H}}$, on a

$$\Gamma(T^*)^\perp = ((R(\Gamma(T)))^\perp)^\perp = \overline{R(\Gamma(T))} = R(\overline{\Gamma(T)}).$$

Alors, $(0, u) \in \overline{\Gamma(T)}$ si et seulement si $(-u, 0) \in \Gamma(T^*)^\perp$, i.e. $0 = ((-u, 0)|(v, T^*v)) = -(u|v)$ pour tout $v \in D(T^*)$. D'où, $(0, u) \in \overline{\Gamma(T)}$ si et seulement si $u \in D(T^*)^\perp$. Alors, T est fermable si et seulement si $D(T^*)^\perp = \{0\}$ ce qui équivaut à $D(T^*)$ est dense dans \mathcal{H} . □

Remarque 2.2.17. Par le lemme 2.2.15, on obtient que T^* est toujours fermé. En effet, son graphe est l'orthogonal d'un sous-espace, c'est donc un fermé.

Proposition 2.2.18. Si T est fermable, alors $(T^*)^* = \overline{T}$.

Démonstration : On utilise encore le lemme 2.2.15 et on utilise que R étant une isométrie, elle commute à \perp . Alors, $\Gamma(T^{**}) = R^2(\Gamma(T)^{\perp\perp}) = -\overline{\Gamma(T)} = \overline{\Gamma(T)}$.

□

Proposition 2.2.19. *Soit T un opérateur bijectif. Alors T^* est aussi bijectif et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Définition 2.2.20. *On dit qu'un opérateur T est symétrique lorsque :*

$$\forall u, v \in D(T), (Tu|v) = (u|Tv).$$

*On dit qu'un opérateur non borné T est **auto-adjoint** lorsque $T = T^*$.*

Proposition 2.2.21. *Soit T un opérateur auto-adjoint. Alors T est fermé et symétrique.*

Remarque 2.2.22. *Attention, la réciproque n'est vraie que pour les opérateurs bornés. En effet, on peut montrer que si on considère $(A_0, D(A_0))$ défini par $D(A_0) = C_0^\infty(]0, 1[)$ et $A_0u = iu''$, alors A_0 est symétrique de même que sa fermeture $\overline{A_0}$ qui est elle de plus fermée. Mais on peut montrer que $\overline{A_0}$ n'est pas auto-adjoint puisque $D(\overline{A_0}) = H_0^1(]0, 1[)$ tandis que $D((\overline{A_0})^*) = H^1(]0, 1[)$.*

Remarque 2.2.23. *Puisque T est symétrique si et seulement si $T \subset T^*$, tout opérateur symétrique est fermable.*

Exemple 2.2.24. 1. *De même que dans le cas borné, un opérateur de multiplication est auto-adjoint si et seulement si la fonction φ qui le définit est à valeurs réelles.*

2. *L'opérateur de Schrödinger libre, défini par $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^d)$ (espace de Sobolev) et pour toute $\psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$, $H_0\psi = -\Delta\psi$ est auto-adjoint.*

Ce second point se ramène au premier par la transformée de Fourier qui est unitaire.

Puisqu'un opérateur fermé et symétrique n'est pas forcément auto-adjoint, on peut donner un résultat de caractérisation des opérateurs auto-adjoints parmi les opérateurs symétriques. Cela est important puisque les principaux résultats que sont le théorème spectral et le théorème de Stone ne sont valables que pour des opérateurs auto-adjoints.

Théorème 2.2.25. *Soit T un opérateur symétrique sur \mathcal{H} . Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *T est auto-adjoint.*
2. *T est fermé et $\text{Ker}(T^* - i) = \text{Ker}(T^* + i) = \{0\}$.*
3. *Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(T - \lambda) = \text{Im}(T - \bar{\lambda}) = \mathcal{H}$.*

Démonstration : Voir [15], Theorem VIII.3, page 256.

□

Dans de nombreux cas, les opérateurs étudiés seront symétriques mais pas forcément fermés donc non-auto-adjoints. Comme un opérateur symétrique est fermable, on aimerait alors avoir au moins leur fermeture qui est auto-adjointe. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 2.2.26. *Un opérateur symétrique T est dit essentiellement auto-adjoint si sa fermeture \overline{T} est un opérateur auto-adjoint.*

Proposition 2.2.27. *Si T est essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe, T^{**} .*

Démonstration : En effet, soit S une telle extension de T . Alors S est fermée et puisque $T \subset S$, $T^{**} \subset S$. Alors, $S = S^* \subset (T^{**})^* = T^{**}$ et $S = T^{**}$.

□

Remarque 2.2.28. En général un opérateur symétrique peut admettre plusieurs extensions auto-adjointes et même une infinité. En effet, si $D(T)$ est l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[0, 1]$ et s'annulant en 0 et 1 et si T est donné par $i \frac{d}{dx}$ sur $D(T)$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, $(T_\alpha, D(T_\alpha))$ défini par la même formule que T mais sur l'ensemble des fonctions φ absolument continues sur $[0, 1]$ telles $\varphi(0) = \alpha \varphi(1)$ est une extension auto-adjointe de T .

Enfin, on peut énoncer l'analogie du théorème 2.2.25 pour les opérateurs essentiellement auto-adjoints.

Corollaire 2.2.29. Soit T un opérateur symétrique sur \mathcal{H} . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. T est essentiellement auto-adjoint.
2. $\text{Ker}(T^* - i) = \text{Ker}(T^* + i) = \{0\}$.
3. $\text{Im}(T \pm i)$ sont denses dans \mathcal{H} .

Ces critères d'auto-adjonction permettent de démontrer un résultat essentiel sur le caractère auto-adjoint ou essentiellement auto-adjoint d'une somme de deux opérateurs auto-adjoints, le théorème de Kato-Rellich.

Soient donc $(T, D(T))$ et $(S, D(S))$ deux opérateurs auto-adjoints. On pose $D(T + S) = D(T) \cap D(S)$ et $T + S$ est défini sur cet espace. Il est évident que si T et S sont bornés, alors $T + S$ est borné et auto-adjoint. Dans le cas où l'un des deux est non borné, il nous faut un critère supplémentaire. En particulier cela permet d'obtenir des conditions d'auto-adjonction pour un opérateur de la forme $-\Delta + V$ (voir [12], p57-62.)

Définition 2.2.30. On dit que S est T -borné si $D(T) \subset D(S)$ et s'il existe a et b strictement positifs tels que,

$$\forall u \in D(T), \|Su\| \leq a\|Tu\| + b\|u\|.$$

L'infimum des réels a pour lesquels un tel b existe est appelé borne relative de S par rapport à T .

Théorème 2.2.31 (Kato-Rellich). Soit T auto-adjoint et S symétrique relativement borné par rapport à T de borne relative $a < 1$. Alors $T + S$ est auto-adjoint sur $D(T)$ et essentiellement auto-adjoint sur tout cœur pour T .

Démonstration : D'après le théorème 2.2.25, il suffit de prouver que pour $\lambda \in \mathbb{R}$ bien choisi, $\text{Im}(T + S \pm i\lambda) = \mathcal{H}$. Comme T est auto-adjoint, son spectre est contenu dans \mathbb{R} donc on peut considérer l'opérateur $S(T \pm i\lambda)^{-1}$ de \mathcal{H} dans \mathcal{H} . De plus, comme T est auto-adjoint, pour tout $u \in D(T)$,

$$\|(T \pm i\lambda)u\|^2 = \|Tu\|^2 + \lambda^2\|u\|^2.$$

En appliquant cette égalité à $u = (T \pm i\lambda)^{-1}v$ pour $v \in \mathcal{H}$ quelconque, on obtient

$$\|v\|^2 = \|T(T \pm i\lambda)^{-1}v\|^2 + \lambda^2\|(T \pm i\lambda)^{-1}v\|^2 \geq \|T(T \pm i\lambda)^{-1}v\|^2$$

ainsi que

$$\lambda^2\|(T \pm i\lambda)^{-1}v\|^2 \leq \|v\|^2$$

ce qui implique que $\|(T \pm i\lambda)^{-1}v\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|v\|$.

De plus, comme S est T -borné de borne relative $a < 1$, pour tout $a < a' < 1$, il existe $b' > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$S(T \pm i\lambda)^{-1}u \leq a' \|T(T \pm i\lambda)^{-1}u\| + b' \|(T \pm i\lambda)^{-1}u\| \leq \left(a' + \frac{b'}{|\lambda|}\right) \|u\|.$$

On peut alors choisir λ tel que $a' + \frac{b'}{|\lambda|} < 1$. Cela implique par le lemme de la série de Neumann que $\text{Id} + S(T \pm i\lambda)^{-1}$ est inversible et que son inverse est donné par

$$(\text{Id} + S(T \pm i\lambda)^{-1})^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (S(T \pm i\lambda)^{-1})^n$$

et est borné. Comme de plus $T \pm i\lambda$ est inversible de $D(T)$ dans \mathcal{H} et d'inverse borné, on en déduit que c'est aussi le cas pour $T + S \pm i\lambda$ dont l'inverse borné est donné par

$$(T + S \pm i\lambda)^{-1} = (T \pm i\lambda)^{-1} (\text{Id} + S(T \pm i\lambda)^{-1})^{-1}.$$

En particulier, $\text{Im}(T + S \pm i\lambda) = \mathcal{H}$ et $T + S$ est auto-adjoint.

Soit D un coeur pour T . Comme $\text{Id} + S|_D(T \pm i\lambda)^{-1}$ se prolonge à un opérateur borné et que celui-ci est inversible pour λ assez grand, on déduit de

$$(T + S)_D \pm i\lambda = (\text{Id} + S|_D(T \pm i\lambda)^{-1})(T|_D \pm i\lambda)^{-1},$$

par passage à l'inverse, que cet inverse est de fermeture bornée et qu'en particulier, $\overline{\text{Im}((T + S)_D \pm i\lambda)} = \mathcal{H}$. Ainsi, $T + S$ est essentiellement auto-adjoint sur D .

□

2.3 Spectre d'un opérateur fermé

Soit $(T, D(T))$ un opérateur non borné. On commence par définir l'ensemble résolvant de T , soit :

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda \text{ est bijective de } D(T) \text{ dans } \mathcal{H} \text{ et } (T - \lambda)^{-1} \text{ est borné}\}.$$

Définition 2.3.1. *Le spectre d'un opérateur T est le complémentaire de son ensemble résolvant :*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

En dimension infinie, le spectre d'un opérateur n'est pas composé uniquement de ses valeurs propres. On appelle alors **spectre ponctuel** l'ensemble des valeurs propres de T et on le note

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists u \neq 0, Tu = \lambda u\}.$$

On a alors

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T).$$

Lorsque T est de plus fermé, par le théorème de la bijection (corollaire du théorème du graphe fermé), si $T - \lambda$ est bijective, alors sa bijection réciproque est automatiquement continue. Ainsi, pour T fermé,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda \text{ est bijective de } D(T) \text{ dans } \mathcal{H}\}.$$

On introduit alors la résolvante de T :

Définition 2.3.2. Soit T un opérateur fermé et soit $\lambda \in \rho(T)$. L'application

$$R_\lambda(T) : \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & D(T) \\ v & \mapsto & (T - \lambda)^{-1}v \end{array}$$

est appelé la résolvante de T au point λ .

Pour les opérateurs fermés, le spectre a de bonnes propriétés, tout comme la résolvante.

Proposition 2.3.3. Soit T un opérateur fermé. Alors

1. $\sigma(T)$ est fermé.
2. L'application $\begin{array}{ccc} \rho(T) & \rightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \lambda & \mapsto & (T - \lambda)^{-1} \end{array}$ est holomorphe sur l'ouvert $\rho(T)$.
3. Si T^* désigne l'adjoint de T , alors $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ et $\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}$.
4. Si T est auto-adjoint, alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration : **1.** Soit $\lambda_0 \in \rho(T)$. Alors $R_{\lambda_0}(T)$ est linéaire et

$$\Gamma(R_{\lambda_0}(T)) = \{(u, (T - \lambda_0)^{-1}u) \mid u \in \mathcal{H}\} = \{(u, v) \mid (v, u) \in \Gamma(T - \lambda_0)\}.$$

Or, $\Gamma(T - \lambda_0)$ est fermé car $\Gamma(T)$ l'est puisque T est fermé, donc $\Gamma(R_{\lambda_0}(T))$ est fermé. Or $R_{\lambda_0}(T)$ est défini sur \mathcal{H} tout entier, donc par le théorème du graphe fermé, $R_{\lambda_0}(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Or,

$$T - \lambda = (T - \lambda_0) - (\lambda - \lambda_0) = (Id - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))(T - \lambda_0).$$

Comme $T - \lambda_0$ est bijectif de $D(T)$ sur \mathcal{H} , $T - \lambda$ l'est si et seulement si $Id - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est bijectif. Comme $R_{\lambda_0}(T)$ est borné, si $|\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1$ alors $\lambda \in \rho(T)$ (lemme de la série de Neumann). Donc $\rho(T)$ est ouvert et $\sigma(T)$ est fermé.

2. De plus, si $|\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < 1$,

$$(Id - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (R_{\lambda_0}(T))^n$$

et

$$(T - \lambda)^{-1} = (T - \lambda_0)^{-1} (Id - (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(T))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (R_{\lambda_0}(T))^{n+1}$$

ce qui prouve le second point.

3. On montre l'égalité sur les ensembles résolvants par double inclusion. Supposons $\lambda \in \rho(T)$. Alors $T - \lambda$ est bijectif et fermé. Donc $(T - \lambda)^*$ est injectif (car $\text{Ker}((T - \lambda)^*) = (\text{Im}(T - \lambda))^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$) donc bijectif. En effet, il est surjectif puisque $T - \lambda$ est injectif et fermé. Puis, $((T - \lambda)^*)^{-1} = ((T - \lambda)^{-1})^*$. Comme de plus $(T - \lambda)^{-1}$ est borné, $((T - \lambda)^{-1})^*$ l'est aussi. De plus $(T - \lambda)^* = T^* - \bar{\lambda}$, donc $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$ d'où l'inclusion $\rho(T) \subset \rho(T^*)$. Alors,

$$\overline{\rho(T^*)} \subset \overline{\rho((T^*)^*)} = \rho(\overline{T}) = \rho(T)$$

d'où la seconde inclusion et par passage au complémentaire l'égalité voulue sur les spectres.

4. Soient λ et μ deux nombres réels. Alors, par un calcul direct, on a, pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$\|(T - (\lambda + i\mu))u\|^2 = \|(T - \lambda)u\|^2 + \mu^2 \|u\|^2.$$

Donc, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\|T - (\lambda + i\mu)u\|^2 \geq \mu^2\|u\|^2$. Si $\mu \neq 0$, $T - (\lambda + i\mu)$ est injectif.

Supposons que $\overline{\text{Im}(T - (\lambda + i\mu))} \neq \mathcal{H}$. Alors, $\text{Ker}(T^* - (\lambda + i\mu))^\perp = \overline{\text{Im}(T - (\lambda + i\mu))} \neq \mathcal{H}$ et $\text{Ker}(T^* - (\lambda + i\mu)) = \overline{\text{Im}(T - (\lambda + i\mu))}^\perp \neq \{0\}$ et $\lambda - i\mu \in \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T)$ puisque $T = T^*$.

Mais cela n'est pas possible car, pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\|(T - (\lambda - i\mu))u\|^2 \geq \mu^2\|u\|^2$. Donc on a $\overline{\text{Im}(T - (\lambda + i\mu))} = \mathcal{H}$ et comme T est fermé, on en déduit que $T - (\lambda + i\mu)$ est bijectif et possède un inverse borné sur son image qui est fermée. Donc, si $\mu \neq 0$, $\lambda + i\mu \in \rho(T)$ ce qui prouve que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ par contraposé.

□

Proposition 2.3.4. Soit T un opérateur fermé. La famille $\{R_\lambda(T) \mid \lambda \in \rho(T)\}$ est commutative et vérifie :

$$\forall \lambda, \mu \in \rho(T), R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(R_\lambda(T))^* = R_{\bar{\lambda}}(T)$.

Démonstration : On écrit

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(T - \mu)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(T - \lambda)R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T).$$

Puis, en échangeant λ et μ on voit que $R_\mu(T)$ et $R_\lambda(T)$ commutent.

□

Cette relation est appelé première égalité de la résolvante.

Théorème 2.3.5 (Critère de Weyl). Soit T un opérateur auto-adjoint. Alors, $\lambda \in \sigma(T)$ si et seulement si il existe une famille $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(T)$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|(T - \lambda)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Démonstration : Démontrons le sens réciproque. Supposons qu'il existe une famille $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(T)$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|(T - \lambda)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Supposons par l'absurde que $\lambda \in \rho(T)$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 = \|u_n\| = \|(T - \lambda)^{-1}(T - \lambda)u_n\| \leq \| (T - \lambda)^{-1} \| \cdot \|(T - \lambda)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où une contradiction et $\lambda \in \sigma(T)$.

Pour l'autre sens, nous aurons besoin du théorème spectral démontré plus loin et c'est pour cela que l'on a besoin de supposer T auto-adjoint.

□

2.4 Rappels sur les opérateurs compacts auto-adjoints

Rappelons qu'un opérateur $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ est dit compact lorsque $\overline{T(B_{\mathcal{H}_1})}$ est une partie compacte de \mathcal{H}_2 , où $B_{\mathcal{H}_1}$ désigne la boule unité de \mathcal{H}_1 . Si T est compact, T est borné.

Nous avons alors les résultats suivants sur le spectre des opérateurs compacts.

Théorème 2.4.1 (Riesz-Schauder.). Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert et T un opérateur compact. Alors, $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est un ensemble discret de \mathbb{C} formé de valeurs propres de T de multiplicités finies. De plus, si \mathcal{H} est de dimension infinie, $0 \in \sigma(T)$.

Remarquons que, lorsque $0 \in \sigma(T)$, 0 peut ne pas être une valeur propre de T . Par ailleurs, 0 peut être un point d'accumulation de $\sigma(T)$

Théorème 2.4.2 (Théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints.). Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact auto-adjoint. Notons $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ les valeurs propres de T non nulles et P_n la projection de \mathcal{H} sur $\text{Ker}(T - \lambda_n)$. Alors, pour $n \neq m$, $P_n P_m = P_m P_n = 0$, P_n est de rang fini, $\lambda_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini et

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

où la série converge au sens de la norme d'opérateur.

Corollaire 2.4.3. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur compact et auto-adjoint. Il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel λ_n tel que $T\phi_n = \lambda_n \phi_n$ et $\lambda_n \rightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini.

2.5 Le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints

Nous allons généraliser au cadre des opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert le résultat classique qui affirme que toute matrice symétrique réelle se diagonalise en base ortho-normée.

Une bonne façon d'énoncer ce théorème sur les matrices est d'écrire que pour toute matrice symétrique réelle $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et des projecteurs orthogonaux P_1, \dots, P_n tels que :

$$A = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n.$$

C'est cette formulation que nous allons généraliser à la dimension infinie, en transformant la somme en une intégrale contre des mesures à valeurs projecteurs.

2.5.1 Familles spectrales

Définition 2.5.1. Une famille spectrale (ou résolution de l'identité) sur \mathcal{H} est une application $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que :

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ est une projection orthogonale, i.e. $E(t)^2 = E(t)$ et $E(t)^* = E(t)$.
2. $\forall s \leq t, E(s) \leq E(t)$, i.e. $\forall u \in \mathcal{H}, (E(s)u|u) \leq (E(t)u|u)$.
3. Continuité forte à droite : $\forall u \in \mathcal{H}, E(t + \varepsilon)u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} E(t)u$.
4. $\forall u \in \mathcal{H}, E(t)u \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ et $E(t)u \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} u$.

En particulier, les points 1 et 2 impliquent que $E(t)E(s) = E(s)E(t)$ pour tous s, t et si $s \leq t$, $E(s)E(t) = E(s)$.

On a aussi : $\forall u \in \mathcal{H}, \forall t \in \mathbb{R}, (E(t)u|u) = \|E(t)u\|^2 \geq 0$ (ou avec 2 et en faisant tendre s vers $-\infty$ à t fixé).

Remarque 2.5.2. La notion de famille spectrale est un analogue de la fonction de répartition d'une variable aléatoire en probabilités.

Exemple 2.5.3. Soit $M \subset \mathbb{R}^d$ mesurable et soit $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On pose $M(t) = \{x \in M \mid g(x) \leq t\}$. Alors $M(t)$ croît vers M au sens de l'inclusion. On pose alors pour $u \in L^2(M)$ et $t \in \mathbb{R}$, $E(t)u = \chi_{M(t)}u$. Alors, $E : t \mapsto E(t)$ est une famille spectrale.

Exemple 2.5.4. Si T est un opérateur auto-adjoint, de spectre discret et tel que pour tout $u \in \mathcal{H}$, $(Tu|u) \geq C\|u\|^2$, alors il existe une suite λ_i de réels qui croît vers l'infini et une base hilbertienne $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $D(T)$ telles que

$$\forall u \in D(T), Tu = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i (u|u_i) u_i.$$

Cela rappelle le théorème spectral pour les opérateurs compacts auto-adjoints. On pose alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}\{u_0, \dots, u_j | \lambda_j \leq t\}$. Alors $t \mapsto E(t)$ est une famille spectrale.

2.5.2 Théorème spectral

Soient $u, v \in \mathcal{H}$. Par l'identité de polarisation, la fonction $F_{u,v}(\lambda) = (E(\lambda)u|v)$ est alors une combinaison linéaire complexe de quatre fonctions croissantes continues à droite en tout point :

$$F_{u,v}(\lambda) = \frac{1}{4} \left(\|E(\lambda)(u+v)\|^2 - \|E(\lambda)(u-v)\|^2 + i\|E(\lambda)(u+iv)\|^2 - i\|E(\lambda)(u-iv)\|^2 \right),$$

et l'on note cette expression $F_{u,v}(\lambda) = \alpha_1 F_1(\lambda) + \dots + \alpha_4 F_4(\lambda)$. D'après la théorie de l'intégration de Stieljes, il existe donc quatre mesures de Borel μ_1, \dots, μ_4 correspondant aux F_i telles que l'on puisse définir, pour toute fonction ϕ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu_1 + \dots + \mu_4)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) dF_{u,v}(\lambda) = \alpha_1 \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d\mu_1 + \dots + \alpha_4 \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d\mu_4.$$

Les mesures μ_i dépendent de u et v et, par la propriété de normalisation des familles spectrales, chaque μ_i est une mesure finie. En effet, on a $\mu_1(\mathbb{R}) \leq \|u+v\|^2, \dots, \mu_4(\mathbb{R}) \leq \|u-iv\|^2$.

Exemple 2.5.5. On reprend le second exemple de la section précédente. Si $u \in \mathcal{H}$ alors $F_{u,u}(\lambda) = (E(\lambda)u|u)$. Si $u = u_0$, alors pour $\lambda < \lambda_0$, $F_{u_0,u_0}(\lambda) = 0$ et pour $\lambda \geq \lambda_0$, $F_{u_0,u_0}(\lambda) = \|u_0\|^2 = 1$. Donc $dF_{u_0,u_0} = \delta_{\lambda_0}$. Si $u = au_0 + bu_1$, alors $dF_{u,u} = |a|^2 \delta_{\lambda_0} + |b|^2 \delta_{\lambda_1}$. Plus généralement, si $u = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i u_i$ avec $\sum |a_i|^2 < +\infty$, alors $dF_{u,u} = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|^2 \delta_{\lambda_i}$.

Nous pouvons donc maintenant énoncer le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints.

Théorème 2.5.6 (Théorème spectral des opérateurs auto-adjoints.). Soit T un opérateur auto-adjoint. Il existe une unique famille spectrale $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$$

au sens où, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$,

$$(Tu|v) = \int_{\sigma(T)} \lambda dF_{u,v}(\lambda).$$

Démonstration : Nous donnons juste les grandes étapes de la construction.

On commence par définir pour $z \in \mathbb{C}$, $\text{Im } z \neq 0$, et $u \in \mathcal{H}$, $F(z) = (R_z(T)u|u)$. Alors F est holomorphe sur le demi-plan complexe supérieur et on vérifie que $\text{Im } F(z) > 0$. C'est donc une fonction de Herglotz qui vérifie par ailleurs l'inégalité

$$|F(z)| \leq \frac{C}{|\text{Im } z|}.$$

On peut donc lui associer une mesure de Borel positive de masse finie, de fonction de répartition w_u telle que

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \lambda} dw_u(\lambda).$$

Par polarisation on obtient alors une mesure de Borel complexe $dw_{u,v}$ qui représente de même $(R_z(T)u|v)$ pour tous $u, v \in \mathcal{H}$. De plus, par des résultats d'analyse harmonique,

$$w_{u,v}(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\lambda+\delta} ((R_{s-i\varepsilon}(T) - R_{s+i\varepsilon}(T))u, v) ds.$$

Or, $(u, v) \mapsto w_{u,v}(\lambda)$ est une forme sesquilinéaire continue donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un unique opérateur $E(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que

$$w_{u,v}(\lambda) = (E(\lambda)u|v).$$

On montre alors que $\lambda \mapsto E(\lambda)$ est une famille spectrale qui vérifie la formule voulue de représentation pour T .

□

2.5.3 Calcul fonctionnel

Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une application borélienne localement bornée sur \mathbb{R} et si T est un opérateur auto-adjoint, on peut définir l'opérateur $\phi(T)$ par :

$$D(\phi(T)) = \{u \in \mathcal{H} \mid \int_{\mathbb{R}} |\phi(\lambda)|^2 dF_{u,u}(\lambda) < +\infty\}$$

et

$$\forall u, v \in \mathcal{H}, (\phi(T)u|v) = \int_{\sigma(T)} \phi(\lambda) dF_{u,v}(\lambda),$$

où $F_{u,v}$ provient de la famille spectrale associée à T par le théorème spectral. Cela permet de développer un calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints.

Notons que si ϕ est à valeurs réelles, alors $\phi(T)$ est aussi auto-adjoint. Nous avons alors la propriété suivante.

Proposition 2.5.7. *Soient f et g deux fonctions boréliennes bornées et T un opérateur auto-adjoint. Alors pour tous $u, v \in \mathcal{H}$,*

$$(f(T)u|g(T)v) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \overline{g(\lambda)} d(E(\lambda)u|v),$$

où E est la famille spectrale associée à T .

Démonstration : Cela se démontre en prenant pour f et g des fonctions indicatrices de boréliens, puis des combinaisons linéaires de telles fonctions (fonctions étagées) puis par passage à la limite.

□

Une première application du calcul fonctionnel est la formule suivant pour la résolvante d'un opérateur auto-adjoint.

Proposition 2.5.8. *Soit T un opérateur auto-adjoint. Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \sigma(T)$. Alors*

$$R_z(T) = (z - T)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - \lambda} dE(\lambda)$$

où E est la famille spectrale associée à T . De plus,

$$\|(z - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(T))}.$$

Démonstration : Le premier point est immédiat par définition du calcul fonctionnel. Puis si $u \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \|(z - T)^{-1}u\|^2 &= ((z - T)^{-1}u|(z - T)^{-1}u) \\ &= \int_{\sigma(T)} (z - \lambda)^{-1} \overline{(z - \lambda)^{-1}} d(E(\lambda)u|u) \\ &= \int_{\sigma(T)} |z - \lambda|^{-2} d(E(\lambda)u|u) \\ &\leq \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |z - \lambda|^{-2} \int_{\mathbb{R}} d(E(\lambda)u|u) = \frac{1}{(\text{dist}(z, \sigma(T)))^2} \|u\|^2. \end{aligned}$$

□

Le théorème spectral permet aussi de définir la notion de projecteur spectral sur un borélien B de \mathbb{R} via la formule :

$$E_B = \mathbb{1}_B(T).$$

En particulier, si B est un intervalle et si E est la famille spectrale associée à T , notons

$$E_{(a,b)} = E(b^-) - E(a^+) \quad \text{et} \quad E_{[a,b]} = E(b^+) - E(a^-).$$

Proposition 2.5.9 (Formule de Stone.). *Soit T un opérateur auto-adjoint. Pour tous $a < b$,*

$$s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b (R_{s-i\varepsilon}(T) - R_{s+i\varepsilon}(T)) ds = \frac{1}{2} (E_{[a,b]} + E_{(a,b)}).$$

Démonstration : Pour une démonstration complète et détaillée, voir [10], Théorème 2.13, page 37.

□

2.5.4 Théorème de Stone

A l'aide du théorème spectral et du calcul fonctionnel qu'il induit, on peut définir pour $t \in \mathbb{R}$ et $(T, D(T))$ un opérateur auto-adjoint, l'opérateur unitaire $U(t) = e^{iT}$. Résumons les propriétés de cet opérateur.

Proposition 2.5.10. 1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t)$ est unitaire et si $s, t \in \mathbb{R}$, $U(t+s) = U(t)U(s)$.*

2. *Si $\psi \in \mathcal{H}$ alors $U(t)\psi \xrightarrow{t \rightarrow t_0} U(t_0)\psi$.*

3. *Si $\psi \in D(T)$, alors $\frac{U(t)\psi - \psi}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} iT\psi$.*

4. *Soit $\psi \in \mathcal{H}$. Si la limite lorsque t tend vers 0 de $\frac{U(t)\psi - \psi}{t}$ existe, alors $\psi \in D(T)$.*

Démonstration : Voir Theorem VIII.7 dans [15].

□

L'opérateur unitaire $U(t)$ permet de résoudre l'équation de Schrödinger :

$$\begin{cases} \partial_t \psi &= iT\psi \\ \psi|_{t=0} &= \psi_0 \end{cases} \quad \text{avec } \psi_0 \in D(T).$$

En effet on a alors pour tout $t \geq 0$, $\psi(t) = U(t)\psi_0$. Ce résultat d'existence de solution à l'équation de Schrödinger admet une réciproque, le théorème de Stone.

Définition 2.5.11. Une fonction $t \mapsto U(t)$ à valeur opérateurs qui vérifie les propriétés 1 et 2 de la proposition 2.5.10 est appelé un sous-groupe unitaire à un paramètre fortement continu.

Théorème 2.5.12. Soit $t \mapsto U(t)$ un sous-groupe unitaire à un paramètre fortement continu sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors, il existe un opérateur auto-adjoint T sur \mathcal{H} tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $U(t) = e^{itT}$. L'opérateur T est appelé le générateur infinitésimal de U .

Démonstration : La construction de ce générateur infinitésimal est faite au Théorème VIII.8 dans [15].

□

Chapitre 3

Types spectraux et dynamique

3.1 Types spectraux

Soit T un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Soit $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ la famille spectrale associée à T . Pour $u \in \mathcal{H}$, on notera dans toute la suite la mesure spectrale μ_u associée à T et u définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mu_u((-\infty, t)) = (E(t)u|u).$$

C'est la mesure associée à la fonction $F_{u,u}$ définie précédemment.

3.1.1 Spectre, spectre ponctuel et mesures spectrales

On commence par donner une caractérisation du spectre en fonction des mesures spectrales.

Proposition 3.1.1. *On a équivalence entre :*

1. $\lambda \in \sigma(T)$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) = E_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]} \neq 0$.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u = u_\varepsilon \in D(T)$, $\mu_u((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) > 0$.

Démonstration : Supposons 1 et montrons 2. Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$, $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) = 0$. Par le critère de Weyl, il existe une suite u_n dans $D(T)$ telle que $\|u_n\| = 1$ pour tout n et $(T - \lambda)u_n \rightarrow 0$. Alors,

$$\|(T - \lambda)u_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda - t|^2 d\mu_{u_n}(t).$$

Or, E est constante sur $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ donc pour tout $u \in \mathcal{H}$, $t \mapsto \mu_u((-\infty, t])$ est nulle sur cet intervalle. Alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda - t|^2 d\mu_{u_n}(t) = \int_{\mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]} |\lambda - t|^2 d\mu_{u_n}(t) \geq \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]} d\mu_{u_n}(t) = \varepsilon^2 \|u_n\|^2.$$

D'où, $\|(T - \lambda)u_n\|^2 \geq \varepsilon^2 \|u_n\|^2 = \varepsilon^2$. Cela contredit $(T - \lambda)u_n \rightarrow 0$. D'où 2.

Supposons 2 et montrons 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) \neq 0$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $E(\lambda + \frac{1}{n}) - E(\lambda - \frac{1}{n}) \neq 0$. Soit alors $u_n \in \text{Im} (E(\lambda + \frac{1}{n}) - E(\lambda - \frac{1}{n}))$ avec $\|u_n\| = 1$. Alors, $E_{(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]} u_n = u_n$ pour tout $n \geq 1$ et comme $\mu_{u_n}(\mathbb{R} \setminus (\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]) = 0$, on a

$$\|(T - \lambda)u_n\|^2 = \int_{(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]} |\lambda - t|^2 d\mu_{u_n}(t) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par le critère de Weyl, $\lambda \in \sigma(T)$.

Supposons 2. Soit $u \in \text{Im } E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)$ avec $\|u\| = 1$. Alors $\mu_u(\mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) = 0$ donc $\mu_u((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) > 0$, d'où 3.

S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) = 0$ alors pour tout $u \in \mathcal{H}$, $\mu_u((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]) = 0$. Donc 3 implique 2 par contraposée.

□

Corollaire 3.1.2. *On a :*

$$\sigma(T) = \overline{\bigcup_{u \in \mathcal{H}} \text{supp } \mu_u} \neq \emptyset.$$

Rappelons que le spectre ponctuel de T est l'ensemble de ses valeurs propres :

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{ est non injectif}\}.$$

Proposition 3.1.3. *On a équivalence entre :*

1. $\lambda \in \sigma_p(T)$.
2. $E_{\{\lambda\}} = E(\lambda) - E(\lambda^-) \neq 0$ (discontinuité).
3. Il existe $u \in D(T)$, $\mu_u(\{\lambda\}) > 0$.

Démonstration : 2 et 3 sont équivalents car $\mu_u(\{\lambda\}) = (E_{\{\lambda\}}u|u) = \|E_{\{\lambda\}}u\|^2$.

Supposons 2 et soit $u \in \text{Im } E_{\{\lambda\}}$, $u \neq 0$. Alors

$$\|(T - \lambda)u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda - t|^2 d\mu_u(t) = 0$$

car $\text{supp } \mu_u = \{\lambda\}$. Donc $Tu = \lambda u$ et $u \neq 0$, donc $\lambda \in \sigma_p(T)$.

La réciproque provient du même calcul en partant cette fois de $0 = \|(T - \lambda)u\|^2$.

□

Remarque 3.1.4. *Cela conduit à définir la multiplicité d'une valeur propre $\lambda \in \sigma_p(T)$ comme étant la dimension de $\text{Im } E_{\{\lambda\}}$. Cette multiplicité peut être infinie.*

Corollaire 3.1.5. *Si λ est un point isolé de $\sigma(T)$ alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

Démonstration : Par définition, il existe $\varepsilon > 0$, $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$. D'où $E_{\{\lambda\}} \neq 0$.

En effet, $E_{(\lambda - \varepsilon, \lambda)} = 0$ car $(\lambda - \varepsilon, \lambda) \cap \sigma(T) = \emptyset$. De même, $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda) = 0$. Donc $E(\lambda) - E(\lambda^-) \neq 0$ et $\lambda \in \sigma_p(T)$.

□

Plus précisément, si λ est un point isolé de $\sigma(T)$, soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\lambda - 2\varepsilon, \lambda[\cup]\lambda, \lambda + 2\varepsilon] \cap \sigma(T) = \emptyset.$$

On peut alors définir le projecteur de Riesz

$$P_\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\varepsilon} (z - T)^{-1} dz$$

où C_ε est le cercle $\{z \in \mathbb{C}; |z - \lambda| = \varepsilon\}$ orienté dans le sens direct. L'intégrale est bien définie puisque $z \mapsto (z - T)^{-1}$ est analytique dans la couronne $\{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - \lambda| < 2\varepsilon\}$.

Proposition 3.1.6. *P_λ est le projecteur spectral sur l'espace propre associé à la valeur propre λ .*

Démonstration : Voir [10], Proposition 3.2, page 42.

□

3.1.2 Spectre essentiel et spectre discret

Le dernier corollaire de la partie précédente nous conduit à la distinction suivante.

Définition 3.1.7. *Le spectre essentiel de T est l'ensemble*

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid \lambda \text{ n'est pas isolé ou est une valeur propre de multiplicité infinie}\}.$$

Le spectre discret de T est l'ensemble

$$\sigma_d(T) = \{\lambda \in \sigma(T) \mid \lambda \text{ est isolé et de multiplicité finie}\}.$$

Remarque 3.1.8. *Un réel λ est dans le spectre essentiel de T si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, le rang de la projection spectrale sur l'intervalle $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ est infini.*

Le spectre de T est la réunion disjointe de son spectre essentiel et de son spectre discret. De plus, $\sigma_d(T) \subset \sigma_p(T)$.

Exemple 3.1.9. 1. Si $T = \text{Id}_{\mathcal{H}}$, alors $\sigma(T) = \{1\}$ et $\sigma(T) = \sigma_{\text{ess}}(T)$ si $\dim \mathcal{H} = \infty$ et $\sigma(T) = \sigma_d(T)$ si $\dim \mathcal{H} < \infty$.
 2. Si $\dim \mathcal{H} < \infty$ alors $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$.
 3. Si T est compact, $\sigma(T) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \sigma_p(T) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \sigma_d(T) \cap (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ et $\sigma_{\text{ess}}(T) = \{0\}$.

Théorème 3.1.10 (Critère de Weyl pour le spectre essentiel.). *Soit T un opérateur auto-adjoint. Alors, $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$ si et seulement si il existe une famille orthonormée $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(T)$ telle que $\|(T - \lambda)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.*

Démonstration : On démontre le sens direct.

Cas 1 : si λ est une valeur propre de multiplicité infinie, on prend pour $\{u_n\}$ une suite orthonormée de vecteur propres.

Cas 2 : si λ n'est pas isolé dans $\sigma(T)$, il existe une suite (λ_n) d'éléments de $\sigma(T)$ deux à deux distincts qui converge vers λ . De plus, pour tout n , il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que les intervalles $]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[$ soient deux à deux disjoints. Comme de plus $\lambda_n \in \sigma(T)$, $E(\lambda_n + \varepsilon_n) - E(\lambda_n - \varepsilon_n) \neq 0$. On peut donc prendre $u_n \in \text{Im}(E(\lambda_n + \varepsilon_n) - E(\lambda_n - \varepsilon_n))$ tel que $\|u_n\| = 1$. De plus,

$$(u_n | u_m) = (E_{]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[} u_n | E_{]\lambda_m - \varepsilon_m, \lambda_m + \varepsilon_m[} u_m) = (u_n | E_{]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[} E_{]\lambda_m - \varepsilon_m, \lambda_m + \varepsilon_m[} u_m) = 0$$

car $E_{]\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n[} E_{]\lambda_m - \varepsilon_m, \lambda_m + \varepsilon_m[} = 0$ puisque les deux intervalles sont disjoints. Donc $\{u_n\}$ est orthonormée. Enfin,

$$\|(T - \lambda)u_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |t - \lambda|^2 d\mu_{u_n}(t) \leq 2(|\lambda_n - \lambda|^2 + \varepsilon_n^2) \int_{\mathbb{R}} d\mu_{u_n}(t)$$

car $\text{supp } \mu_{u_n} \subset [\lambda_n - \varepsilon_n, \lambda_n + \varepsilon_n]$. Alors le majorant tend vers 0 car de plus $\int_{\mathbb{R}} d\mu_{u_n}(t) = \|u_n\|^2 = 1$.

Pour la réciproque, supposons qu'il existe une famille orthonormée $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $D(T)$ telle que $\|(T - \lambda)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\text{Im}(E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon))$ est de dimension infinie. En effet, si ce projecteur est de rang fini il est donc compact et il transforme une suite orthonormée qui converge donc faiblement vers 0 en une autre suite

qui converge faiblement vers 0. En particulier, la suite (μ_{u_n}) converge alors vaguement vers 0 sur l'intervalle $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$. Ainsi on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)u_n\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |t - \lambda|^2 d\mu_{u_n}(t) \\ &= \int_{\mathbb{R} \setminus (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]} |t - \lambda|^2 d\mu_{u_n}(t) + \int_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]} |t - \lambda|^2 d\mu_{u_n}(t) \\ &\geq \varepsilon^2 + \int_{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]} |t - \lambda|^2 d\mu_{u_n}(t). \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini on arrive à la contradiction $0 \geq \varepsilon^2$.

Alors, soit $\text{Im}(E_{\{\lambda\}})$ est de dimension infinie et λ est une valeur propre de multiplicité infinie, soit ce projecteur est de rang fini et on a toujours $\text{Im}(E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon))$ de dimension infinie. Alors, $([\lambda - \varepsilon, \lambda] \cup]\lambda, \lambda + \varepsilon]) \cap \sigma(T) \neq \emptyset$ donc λ n'est pas isolé. D'où $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$.

□

Ce critère de Weyl pour le spectre essentiel permet de démontrer un résultat de stabilité du spectre essentiel.

Théorème 3.1.11. Soient T et S deux opérateurs auto-adjoints, S étant de plus supposé compact. Alors $\sigma_{\text{ess}}(T + S) = \sigma_{\text{ess}}(T)$.

Démonstration : Montrons la première inclusion. Soit $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T + S)$. Par le critère de Weyl, il existe une suite orthonormée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\|(T + S - \lambda)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant orthonormée, elle converge faiblement vers 0 et puisque S est compact, $Su_n \rightarrow 0$. Ainsi, $\|(T - \lambda)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par la réciproque du critère de Weyl, $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(T)$.

La seconde inclusion s'obtient en appliquant la première à $A + B$ qui est auto-adjoint par le théorème de Kato-Rellich (B étant compact, il est borné) et à $-B$ qui est compact.

□

3.1.3 Spectres purement ponctuel, absolument continu et singulier continu

On considère une mesure borélienne μ sur \mathbb{R} telle que $\mu(\mathbb{R}) < \infty$. Alors $\mu(\{x\}) = 0$ sauf pour un ensemble au plus dénombrable de réels x .

Définition 3.1.12. Soit M un borélien de \mathbb{R} .

1. On dit que μ est une mesure ponctuelle lorsque :

$$\mu(M) = \sum_{x \in M} \mu(\{x\}).$$

En particulier, son support est dénombrable.

2. On dit que μ est une mesure continue lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \mu(\{x\}) = 0$.

3. On dit que μ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue lorsque :

$$\text{Leb}(M) = 0 \Rightarrow \mu(M) = 0.$$

4. On dit que μ est une mesure singulièrement continue lorsque μ est continue et qu'il existe un borélien $S \subset \mathbb{R}$ tel que $\mu(S) = 0$ et $\text{Leb}(\mathbb{R} \setminus S) = 0$.

Exemple 3.1.13. 1. *Mesure ponctuelle* : la mesure de Dirac en un point $a \in \mathbb{R}$ définie par $\delta_a(M) = 1$ si $a \in M$ et 0 sinon.

2. *Mesure absolument continue* : soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \text{Leb})$. Alors la mesure μ définie par

$$\forall g \in C_b^0(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Réciproquement, par le théorème de Radon-Nikodym, elles sont toutes de cette forme et $f = \frac{d\mu}{dx}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de μ .

3. *Mesure singulièrement continue* : la mesure de Cantor dont la fonction de répartition n'est autre que l'escalier du Diable défini sur l'ensemble triadique de Cantor.

L'intérêt de ces notions est que toute mesure borélienne finie se décompose en une somme de mesures ayant ces propriétés.

Théorème 3.1.14 (Lebesgue-Radon-Nikodym.). *Toute mesure de Borel finie μ se décompose de façon unique en*

$$\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sc}$$

où μ_{pp} est une mesure ponctuelle, μ_{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et μ_{sc} est une mesure singulièrement continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration : Voir [14], Section 6.10.

□

Nous allons appliquer cette décomposition de toute mesure borélienne finie aux mesures spectrales associées à un opérateur auto-adjoint.

Soient T un opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} et soit $u \in \mathcal{H}$. Soit μ_u la mesure spectrale associée à T et à u . C'est une mesure de Borel finie à valeurs complexes a priori. On pose :

1. $\mathcal{H}_{pp} = \{u \in \mathcal{H} \mid \mu_u \text{ soit une mesure ponctuelle}\}$.
2. $\mathcal{H}_{ac} = \{u \in \mathcal{H} \mid \mu_u \text{ soit une mesure absolument continue}\}$.
3. $\mathcal{H}_{sc} = \{u \in \mathcal{H} \mid \mu_u \text{ soit une mesure singulièrement continue}\}$.

Théorème 3.1.15. \mathcal{H}_{pp} , \mathcal{H}_{ac} et \mathcal{H}_{sc} sont des sous-espaces fermés de \mathcal{H} deux à deux orthogonaux et tels que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}.$$

De plus, chacun de ces sous-espaces est invariant par T .

Démonstration : Le premier point vient du fait que si u et v sont dans \mathcal{H}_{pp} alors il existe X et Y dénombrables tels que $E_X u = u$ et $E_Y v = v$. Alors, $E_{X \cup Y} u = E_{X \cup Y} E_X u = E_{(X \cup Y) \cap X} u = E_X u = u$ et de même, $E_{X \cup Y} v = v$. D'où, $E_{X \cup Y} (u + v) = u + v$ et $X \cup Y$ est dénombrable. De même pour la multiplication par un scalaire. On montre de même que les deux autres ensembles sont des sous-espaces vectoriels. Pour \mathcal{H}_{sc} on utilise le fait que si X et Y sont de mesure nulle alors $X \cup Y$ l'est aussi.

Pour le second point, soit $u \in \mathcal{H}$ et écrivons $\mu_u = \mu_{u,pp} + \mu_{u,ac} + \mu_{u,sc}$. Si X est dénombrable tel que $\mu_{u,pp}(\mathbb{R} \setminus X) = 0$, on se donne Y tel que $Y \cap X = \emptyset$, $\text{Leb}(Y) = 0$ et $\mu_{u,sc}(\mathbb{R} \setminus Y) = 0$.

On pose enfin $Z = \mathbb{R} \setminus (X \cup Y)$. Alors $\mathbb{R} = X \cup Y \cup Z$ et cette réunion est disjointe et on a $\mu_{u,ac} = \mu_u(Z \cap \cdot)$, $\mu_{u,sc} = \mu_u(Y \cap \cdot)$ et $\mu_{u,pp} = \mu_u(X \cap \cdot)$. On écrit :

$$u = E_{\mathbb{R}}u = E_{X \cup Y \cup Z}u = E_Xu + E_Yu + E_Zu.$$

De plus, $\mu_{E_Zu} = \chi_Z \mu_u \ll \text{Leb}$ donc $E_Zu \in \mathcal{H}_{ac}$. De même, $E_Yu \in \mathcal{H}_{sc}$ et $E_Xu \in \mathcal{H}_{pp}$. L'orthogonalité deux à deux vient du fait que les projecteurs sont orthogonaux.

Pour l'invariance par rapport à T , on se donne $u \in D(T)$ et on lui associe μ_u . On calcule μ_{Tu} . On a

$$\int_{-\infty}^t d\mu_{Tu}(s) = (E(t)(Tu)|Tu) = (TE(t)Tu|u) = (E(id)E(\chi_{]-\infty,t]})E(id)u|u) = (E(id)\chi_{]-\infty,t]}id|u)$$

Si $u_t = id \chi_{]-\infty,t]} id$, alors $u_t(s) = s^2 \chi_{]-\infty,t]}(s)$. D'où,

$$\int_{-\infty}^t d\mu_{Tu}(s) = \int_{-\infty}^t s^2 d\mu_u(s).$$

Ainsi, $\mu_{Tu} = t^2 \mu_u$. On en déduit l'invariance des trois sous-espaces par T .

□

On peut alors définir trois types spectraux qui décomposent le spectre de T .

Définition 3.1.16. Soit T un opérateur auto-adjoint.

1. Le spectre purement ponctuel de T est l'ensemble $\sigma_{pp}(T) = \sigma(T|_{\mathcal{H}_{pp}})$.
2. Le spectre absolument continu de T est l'ensemble $\sigma_{ac}(T) = \sigma(T|_{\mathcal{H}_{ac}})$.
3. Le spectre singulier continu de T est l'ensemble $\sigma_{sc}(T) = \sigma(T|_{\mathcal{H}_{sc}})$.

Il vient alors :

$$\sigma(T) = \sigma_{pp}(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T)$$

mais cette réunion n'est pas nécessairement disjointe (voir les exemples de valeurs propres plongées dans le spectre absolument continu).

On dit que l'opérateur T est de spectre purement absolument continu (resp. pp, resp. sc) lorsque $\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}$, resp. $\mathcal{H}_{sc} = \mathcal{H}$). Si cela implique bien que $\sigma(T) = \sigma_{ac}(T)$, la réciproque n'est pas vraie en général.

De plus, on a :

$$\sigma_{pp}(T) = \overline{\sigma_p(T)}.$$

En effet, tout ensemble dénombrable est réunion dénombrable de singletons.

Enfin, avec cette décomposition, on peut aussi définir la notion de spectre continu et celle de spectre singulier. On pose $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}$ et ainsi c'est l'espace des vecteurs tels que μ_u soit une mesure continue. L'espace \mathcal{H}_c est encore invariant par T et on pose :

$$\sigma_c(T) = \sigma(T|_{\mathcal{H}_c}).$$

On peut aussi définir $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc}$ et $\sigma_s(T) = \sigma(T|_{\mathcal{H}_s})$ le spectre singulier de T .

Nous terminons cette section par un résultat de stabilité du spectre absolument continu. Auparavant, nous introduisons une définition.

Définition 3.1.17. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} . Un opérateur T , auto-adjoint, borné et positif est dit de classe trace lorsque :

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n | Tu_n) < \infty.$$

Le nombre $\mathrm{Tr}(T)$ ne dépend pas du choix de la base hilbertienne et plus généralement un opérateur T borné et auto-adjoint est dit de classe trace lorsque $\mathrm{Tr}(T) < \infty$. Un opérateur de classe trace est compact.

Théorème 3.1.18 (Kato-Rosenblum). Soient T et S deux opérateurs auto-adjoints avec S de classe trace. Alors

$$\sigma_{\mathrm{ac}}(T + S) = \sigma_{\mathrm{ac}}(T).$$

Démonstration : Pour un énoncé plus complet donnant un résultat sur les opérateurs d'onde ainsi que pour la démonstration, voir [8], Theorem 4.4, page 542. □

3.2 Exemples de spectres

3.2.1 Le laplacien discret en dimension 1

Nous introduisons le laplacien discret en dimension un. C'est l'opérateur Δ défini sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$ par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z}, (\Delta u)_n = u_{n-1} + u_{n+1}.$$

L'opérateur Δ est l'analogue discret de la dérivée seconde.

Tout d'abord, Δ est borné. En effet, si $\|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq 1$, alors $\|\Delta u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq 2\|u\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq 2$, donc $\|\Delta\| \leq 2$. Puis, montrons que Δ est auto-adjoint. Soient $u, v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Alors

$$\begin{aligned} (\Delta u | v) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\Delta u)_n \overline{v_n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{n-1} \overline{v_n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{n+1} \overline{v_n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \overline{v_{n+1}} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \overline{v_{n-1}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \overline{(v_{n-1} + v_{n+1})} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \overline{(\Delta v)_n} = (u | \Delta v). \end{aligned}$$

Donc, Δ est un opérateur borné auto-adjoint.

Nous allons maintenant calculer le spectre de Δ . Pour cela, on introduit l'opérateur de Fourier $\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2([0, 2\pi])$ défini pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{C})$ et tout $x \in [0, 2\pi]$ par $(\mathcal{F}u)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{inx}$. On pose alors $S = \mathcal{F} \circ \Delta \circ \mathcal{F}^{-1}$. Calculons S . Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$. Supposons que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\mathcal{F}^{-1}f)_n = \hat{f}(n)$. Alors, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} (Sf)(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\hat{f}(n-1) + \hat{f}(n+1)) e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{i(n+1)x} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{i(n-1)x} \\ &= (e^{ix} + e^{-ix}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx} = (2 \cos(x)) f(x). \end{aligned}$$

Donc, si on pose pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\varphi(x) = 2 \cos(x)$, $S = M_\varphi$ où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ . Or, comme \mathcal{F} est une transformation unitaire, on a $\sigma(\Delta) = \sigma(M_\varphi)$ et $\sigma_p(\Delta) = \sigma_p(M_\varphi)$. Alors, $\sigma(M_\varphi) = \varphi(\mathbb{R}) = [-2, 2]$. Donc

$$\sigma(\Delta) = [-2, 2].$$

De plus, comme φ n'est constante sur aucun intervalle de \mathbb{R} , M_φ n'admet pas de valeur propre. En effet, si $u \in L^2([0, \pi])$, l'équation $\varphi(x)u(x) = \lambda u(x)$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$ impose $u = 0$. Donc

$$\sigma_p(\Delta) = \emptyset.$$

Soit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M(\lambda) = \{x \in M \mid \varphi(x) \leq \lambda\}$. Posons, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in L^2([0, 2\pi])$, $E(\lambda)u = \mathbf{1}_{M(\lambda)}u$. Alors, $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(L^2([0, 2\pi]))$ est une famille spectrale. De plus, $M_\varphi = \int_{-2}^2 \lambda dE(\lambda)$, donc E est la famille spectrale associée à M_φ par le théorème spectral. Alors, comme \mathcal{F} est unitaire, l'application $\tilde{E} = \mathcal{F}^{-1} \circ E \circ \mathcal{F}$ est encore une famille spectrale et on peut vérifier comme pour E que

$$\Delta = \int_{-2}^2 \lambda d\tilde{E}(\lambda).$$

Cela traduit aussi le fait que le spectre de Δ est purement absolument continu :

$$\sigma(\Delta) = \sigma_{\text{ac}}(\Delta)$$

Remarque 3.2.1. *Tous les résultats obtenus sur cet exemple se généralise directement au cas de la dimension $d \geq 1$ quelconque.*

Remarque 3.2.2. Transformation de Fourier et spectre. *L'utilisation faite dans cet exemple de la transformée de Fourier \mathcal{F} est très courante pour les calculs de spectres d'opérateurs, surtout pour les opérateurs différentiels. Cela tient au fait que, \mathcal{F} étant unitaire, la conjugaison par \mathcal{F} laisse invariants le spectre et le spectre ponctuel. Or, \mathcal{F} a la particularité de transformer une dérivation (ici discrète) en une multiplication. Donc, conjuguer l'opérateur étudié par \mathcal{F} permet de ramener le calcul de son spectre au calcul du spectre d'un opérateur de multiplication.*

3.2.2 Un opérateur de Sturm-Liouville

Soit $q \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $(T, D(T))$ l'opérateur défini sur $L^2([0, 1])$ par

$$D(T) = \{f \in C^2([0, 1]) \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } \forall f \in D(T), Tf = -f'' + qf.$$

Tout d'abord, pour tous $f, g \in D(T)$, on prouve par intégration par parties que $(Tf|g) = (f|Tg)$. Ainsi, l'opérateur $(T, D(T))$ est symétrique. On peut alors montrer qu'il est essentiellement auto-adjoint et dans la suite on considère sa fermeture $(\bar{T}, D(\bar{T}))$ qui est auto-adjointe. L'opérateur \bar{T} est un exemple d'opérateur de Sturm-Liouville.

On prouve ensuite, à l'aide de la variation de la constante à l'ordre 2, que si $z \notin \sigma_p(T)$, alors il existe $K_z \in L^2([0, 1]^2)$ (et même $K_z \in C([0, 1]^2)$) tel que

$$\forall g \in C^2([0, 1]), (T - z)f = g \Leftrightarrow f(t) = \int_0^1 K_z(t, s)g(s)ds.$$

Cela signifie que, pour tout $z \notin \sigma_p(T)$, la résolvante $R_z(T)$ est la restriction d'un opérateur de Hilbert-Schmidt et est donc un opérateur compact. En particulier, pour tout $z \notin \sigma_p(T)$, $R_z(T)$ est la restriction d'un opérateur borné. Cela reste valable pour \bar{T} , donc, si $z \notin \sigma_p(T)$, $z \notin \sigma(\bar{T})$ d'où l'on déduit que $\sigma(\bar{T}) = \sigma_p(\bar{T}) = \sigma_p(T)$.

De plus, si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in \text{Ker}(T - \lambda)$, alors, par intégration par parties, $\lambda \|f\|_2^2 = (Tf|f) = \|f'\|_2^2 + \int_0^1 q(t)\bar{f}(t)f(t)dt \geq (\inf_{[0,1]} q)\|f\|_2^2$, donc $\lambda \geq \inf_{[0,1]} q$. Donc $\sigma(\bar{T}) \subset [\inf_{[0,1]} q, +\infty[$.

Si $\mu < \inf_{[0,1]} q$, alors $\mu \notin \sigma(\bar{T})$ et $R_\mu(\bar{T})$ est compact et auto-adjoint car \bar{T} l'est. Donc le spectre de $R_\mu(\bar{T})$ est composé de 0 et de valeurs propres de multiplicité finie. En fait, on a $\sigma(R_\mu(\bar{T})) = \{\frac{1}{\mu-\lambda_n} \mid \lambda_n \in \sigma_p(\bar{T})\}$. De plus, il existe une base hilbertienne $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ telle que

$$\forall g \in L^2([0,1]), R_\mu(\bar{T})g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu-\lambda_n} (g|f_n) f_n,$$

où les f_n sont des fonctions propres de $R_\mu(\bar{T})$ associées aux valeurs propres $\frac{1}{\mu-\lambda_n}$. Donc les f_n sont aussi des fonctions propres de \bar{T} associées aux valeurs propres λ_n . On déduit de tout cela que

$$\bar{T} = \sum_{n \geq 0} \lambda_n (\cdot | f_n) f_n \text{ et } D(\bar{T}) = \{f \in L^2([0,1]) \mid \sum_{n \geq 0} |\lambda_n (f | f_n)|^2 < +\infty\}.$$

Ainsi, bien que \bar{T} ne soit pas borné, le fait que sa résolvante soit compacte nous permet encore de le diagonaliser en base hilbertienne comme un opérateur compact.

3.2.3 Opérateurs de Schrödinger périodiques

On considère l'exemple d'un opérateur de Schrödinger périodique agissant sur l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$,

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V, \quad (3.1)$$

où V est une fonction continue par morceaux et périodique sur \mathbb{R} , de période $2L_0$ pour fixer les notations.

Alors, le spectre de l'opérateur H est purement absolument continu, H n'a aucune valeur propre et son spectre est une union de bandes appelées bandes spectrales :

$$\sigma(H) = \bigcup_{p \geq 0} [E_{\min}^p, E_{\max}^p].$$

Les réels E_{\min}^p et E_{\max}^p sont appelés les bords des bandes et les intervalles $(E_{\max}^p, E_{\min}^{p+1})$ sont les trous spectraux.

Les bords des bandes sont solutions d'équations avec conditions aux bords quasi-périodiques. Soit $\omega \in [-L_0, L_0]$. On considère la restriction $H(\omega)$ de H à $H^2([-L_0, L_0])$, l'espace de Sobolev des fonctions $\psi \in H^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x + 2L_0) = e^{i(\frac{\pi}{L_0}\omega + \pi)} \psi(x). \quad (3.2)$$

Puisque $H^2([-L_0, L_0]) \subset C^1([-L_0, L_0])$, cette condition est équivalente aux conditions aux bords :

$$\psi(L_0) = e^{i(\frac{\pi}{L_0}\omega + \pi)} \psi(-L_0) \quad \text{and} \quad \psi'(L_0) = e^{i(\frac{\pi}{L_0}\omega + \pi)} \psi'(-L_0). \quad (3.3)$$

L'opérateur $H(\omega)$ est auto-adjoint. Il est même Hilbert-Schmidt donc compact. Son spectre est purement ponctuel et les bords des bandes sont alors les valeurs propres de $H(-L_0)$ et de $H(0)$. On a alors :

$$\sigma(H(-L_0)) := \{E_{\min}^0, E_{\max}^1, E_{\min}^2, E_{\max}^3, \dots\}$$

et

$$\sigma(H(0)) := \{E_{\max}^0, E_{\min}^1, E_{\max}^2, E_{\min}^3, \dots\}.$$

Le lien entre H et $H(\omega)$ est donné par la notion d'intégrale directe d'opérateurs. Tout d'abord, si \mathcal{H}' est un espace de Hilbert et si $(X, d\mu)$ est un espace mesuré, alors on considère la "somme continue" de copies de \mathcal{H}' ,

$$\mathcal{H} = \int_X^\oplus \mathcal{H}' d\mu := L^2(X, d\mu, \mathcal{H}').$$

Alors, si $A'(\cdot)$ est une fonction mesurable de X dans l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H}' , on définit un opérateur A sur \mathcal{H} par :

$$D(A) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}, \psi(x) \in D(A'(x)) \text{ pour p.t. } x \in X \text{ et } \int_X \|A'(x)\psi(x)\|_{\mathcal{H}'}^2 d\mu(x) < +\infty \right\}$$

et $(A\psi)(x) = A'(x)\psi(x)$. On écrit alors

$$A = \int_X^{\oplus} A'(x) d\mu(x).$$

Avec ce formalisme, on montre alors que H est l'intégrale directe des opérateurs $H(\omega)$:

$$H = \int_{[-L_0, L_0]}^{\oplus} H(\omega) d\omega.$$

Le résultat sur le spectre de bande de H résulte alors du fait que l'on peut montrer que les valeurs propres de $H(\omega)$ sont analytiques en ω et non constantes (elles sont même strictement monotone, croissante pour les bandes paires, décroissantes pour les impaires). Un résultat général sur les intégrales directes d'opérateurs assure alors que le spectre est purement absolument continu (la dérivée de Radon-Nikodym sur chaque bande est donnée par l'inverse de la dérivée de $\omega \mapsto E_p(\omega)$).

3.2.4 Opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques

On s'intéresse à un opérateur de Schrödinger discret :

$$h_{\alpha, \omega, f} = -\Delta_d + V \text{ agissant sur } \ell^2(\mathbb{Z}^d).$$

où V est un potentiel quasi-périodique, *i.e.* de la forme

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, V(n) = f(\omega + n\alpha), \alpha, \omega \in \mathbb{T}^d, f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}).$$

Le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{T}^d$ est à coordonnées rationnellement indépendantes (en ajoutant 1 aux coordonnées) :

$$k_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq d, k_1\alpha_1 + \dots + k_d\alpha_d = 0 \in \mathbb{T} \Rightarrow k_j = 0, 1 \leq j \leq d.$$

Génériquement, un tel opérateur a un spectre purement singulier continu.

Théorème 3.2.3. *Il existe un ensemble résiduel $\mathcal{F}_{sc} \subset C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}_{sc}$ et pour Lebesgue-presque tout $\omega \in \mathbb{T}^d$, le spectre de $h_{\alpha, \omega, f}$ est purement singulier continu.*

Par ailleurs ce spectre est génériquement un ensemble de Cantor (une sous-partie fermée, sans point isolé et ne contenant aucun intervalle).

Théorème 3.2.4. *Il existe un ensemble résiduel $\mathcal{F}_{cantor} \subset C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}_{cantor}$ et pour tout $\omega \in \mathbb{T}^d$, le spectre de $h_{\alpha, \omega, f}$ est un ensemble de Cantor.*

Il s'avère que le cas des opérateurs de Schrödinger quasi-périodique est plus subtil que cela. En effet en mettant un paramètre d'intensité devant le potentiel, d'autres types spectraux peuvent apparaître. Pour illustrer ce phénomène, nous allons regarder le seul modèle quasi-périodique que l'on peut considérer comme étant complètement compris, celui du presque-Mathieu. Soit $H_{\omega}^{\alpha, \lambda}$ agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (H_{\omega}^{\alpha, \lambda}\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + \lambda \cos(2\pi(\omega + n\alpha))\psi(n).$$

On pose alors

$$\Sigma^{\alpha, \lambda} = \bigcup_{\omega \in \mathbb{T}} \sigma(H_{\omega}^{\alpha, \lambda}).$$

On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 3.2.5 (Mesure du spectre.). *Pour tout $\lambda > 0$ et pour tout irrationnel $\alpha \in \mathbb{T}$, on a*

$$\text{Leb}(\Sigma^{\alpha,\lambda}) = 4|1 - \lambda|.$$

Théorème 3.2.6 (Transition metal-isolant.). *1. Si $\lambda < 1$ alors pour tout α et tout ω , $\sigma(H_\omega^{\alpha,\lambda})$ est purement absolument continu.*

2. Si $\lambda = 1$, pour tout α et pour tout ω excepté un nombre dénombrable, $\sigma(H_\omega^{\alpha,\lambda})$ est purement singulier continu.

3. Si $\lambda > 1$, pour presque tout α et presque tout ω , $\sigma(H_\omega^{\alpha,\lambda})$ est purement ponctuel et les fonctions propres associées décroissent exponentiellement.

4. Si $\lambda > 1$ pour α générique et pour tout ω , $\sigma(H_\omega^{\alpha,\lambda})$ est purement singulier continu.

5. Si $\lambda > 1$ pour tout α et pour ω générique, $\sigma(H_\omega^{\alpha,\lambda})$ est purement singulier continu.

Théorème 3.2.7 (Ten Martini Problem.). *Pour tout $\lambda > 0$ et tout irrationnel $\alpha \in \mathbb{T}$, $\Sigma^{\alpha,\lambda}$ est un ensemble de Cantor.*

3.3 Types spectraux et dynamique

On considère un système quantique comme par exemple un électron se propageant dans un cristal. Étant donné un état initial $\psi_0 \in \mathcal{H}$ il doit exister un unique état $\psi(\cdot, t) : x \mapsto \psi(x, t)$ représentant l'état du système au temps t . On écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi(\cdot, t) = U(t)\psi_0.$$

Pour tout t , $U(t)$ est un opérateur linéaire sur \mathcal{H} qui est unitaire ($\|U(t)\psi\| = \|\psi\|$) et qui vérifie :

$$U(0) = \text{Id}, \text{ et } \forall s, t \in \mathbb{R}, U(s+t) = U(s)U(t).$$

On suppose de plus que pour tout $\psi \in \mathcal{H}$ et tout $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} U(t)\psi = U(t_0)\psi.$$

On dit que U est un sous-groupe unitaire à un paramètre fortement continu.

On pose alors : $D(H) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(U(t)\psi - \psi) \text{ existe}\}$ et, pour tout $\psi \in D(H)$,

$$H\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{i}{t}(U(t)\psi - \psi) \iff U(t) = e^{itH}.$$

L'opérateur $(H, D(H))$ est appelé l'hamiltonien du système quantique et correspond à l'énergie de ce système. Si $\psi_0 \in D(H)$, alors ψ est une solution de l'équation de Schrödinger :

$$\partial_t \psi = iH\psi \text{ et } \psi(\cdot, 0) = \psi_0.$$

A l'aide du calcul fonctionnel on peut donc écrire :

$$\psi(\cdot, t) = e^{itH}\psi_0.$$

Étudier la dynamique d'un système c'est étudier l'évolution de ses états au cours du temps. On va voir dans la suite que l'évolution de $\psi(\cdot, t)$ dépend fortement de l'espace dans lequel se trouve l'état initial ψ_0 dans la décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{pp}} \oplus \mathcal{H}_{\text{ac}} \oplus \mathcal{H}_{\text{sc}}$. Réciproquement, ces espaces sont caractérisés par la dynamique des états qu'ils induisent.

3.3.1 Rappels sur la transformée de Fourier d'une mesure

Soit μ une mesure borélienne sur \mathbb{R} . On définit la transformée de Fourier de μ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\mu(x).$$

On a alors les trois résultats suivants :

1. Lemme de Riemann-Lebesgue : si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue alors $\hat{\mu}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$.
2. Théorème de Plancherel : $\hat{\mu} \in L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sa dérivé de Radon-Nikodym $\frac{d\mu}{dx} \in L^2(\mathbb{R})$. Dans ce cas :

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(t)|^2 dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d\mu}{dx}(x) \right|^2 dx.$$

3. Théorème de Wiener :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2 ds = \sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2.$$

3.3.2 Le théorème R.A.G.E.

Théorème 3.3.1 (R.A.G.E.). Soit H un opérateur auto-adjoint agissant sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ (ou sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ en adaptant les notations).

1. $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$ si et seulement si

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |e^{\pm itH} \psi(x)|^2 dx \right) = 0.$$

Un tel ψ est appelé un état borné.

2. $\psi \in \mathcal{H}_c$ si et seulement si

$$\forall R > 0, \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{B(0,R)} |e^{\pm itH} \psi(x)|^2 dx \right) dt = 0.$$

Un tel ψ est appelé un état diffusif.

3. Si $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$ alors

$$\forall R > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{B(0,R)} |e^{-itH} \psi(x)|^2 dx = 0.$$

mais la réciproque n'est pas vraie.

On peut remplacer $B(0, R)$ par n'importe quel compact de \mathbb{R}^d , ce qui compte c'est de pouvoir appliquer le théorème de convergence bornée.

Soit $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$. Alors,

$$T_R(\psi) = \int_0^{+\infty} \int_{B(0,R)} |e^{\pm itH} \psi(x)|^2 dx$$

est le temps de présence de la particule d'état ψ dans $B(0, R)$.

Soit $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$. Alors,

$$W_R(\psi) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{B(0,R)} |e^{\pm itH} \psi(x)|^2 dx \right) dt$$

est la probabilité de présence de la particule d'état ψ dans $B(0, R)$.

- Corollaire 3.3.2.**
1. Si, pour tout $R > 0$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$ de norme 1 on a $T_R(\psi) = \infty$ et $W_R(\psi) > 0$ alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp}$ et H est de spectre purement ponctuel.
 2. Si pour tout $R > 0$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$ de norme 1 on a $T_R(\psi) = \infty$ et $W_R(\psi) = 0$ alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{sc}$ et H est de spectre purement singulier continu.
 3. Si pour tout $R > 0$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$ de norme 1 on a $T_R(\psi) < \infty$ alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}$ et H est de spectre purement absolument continu.

Démonstration : [Démonstration du théorème R.A.G.E.]

1. Commençons par démontrer l'implication dans le sens direct du point 1. Soit $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$. Quitte à considérer des combinaisons linéaires (et le théorème de Pythagore car les espaces propres sont deux à deux orthogonaux) et à passer à la limite par le TCD, on peut supposer que ψ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de H (car H est auto-adjoint). Alors : $e^{\pm itH}\psi = e^{\pm i\lambda t}\psi$ et puisque $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |e^{\pm itH}\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |\psi(x)|^2 dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Montrons l'implication dans le sens direct du point 2. Soit $R > 0$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ et si $E(\cdot)$ désigne la famille spectrale associée à H alors :

$$(\varphi | e^{-itH}\psi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} d\mu_{\varphi,\psi}(\lambda) = \hat{\mu}_{\varphi,\psi}(t)$$

où $\mu_{\varphi,\psi}(\lambda) = (\varphi | E(\lambda)\psi)$. On applique le théorème de Wiener à $\mu_{\varphi,\psi}$:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{\mu}_{\varphi,\psi}(t)|^2 dt = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\mu_{\varphi,\psi}(\{\lambda\})|^2.$$

D'où :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |(\varphi | e^{\pm itH}\psi)|^2 dt = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |(\varphi | E(\{\lambda\})\psi)|^2.$$

Or, si $\psi \in \mathcal{H}_c$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\{\lambda\})\psi = 0$, d'où, si $\psi \in \mathcal{H}_c$, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |(\varphi | e^{\pm itH}\psi)|^2 dt = 0.$$

On obtient alors le résultat voulu pour $\varphi = \mathbf{1}_{B(0,R)} \overline{e^{\pm itH}\psi}$.

1-2 bis. Montrons simultanée les réciproques des points 1 et 2. Soient :

$$\mathcal{H}_a = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |e^{\pm itH}\psi(x)|^2 dx \right) = 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{H}_b = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \forall R > 0, \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{B(0,R)} |e^{\pm itH}\psi(x)|^2 dx \right) dt = 0 \right\}.$$

On vient de démontrer que : $\mathcal{H}_{pp} \subset \mathcal{H}_a$ et $\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}_b$. Soient alors $\varphi \in \mathcal{H}_a$ et $\psi \in \mathcal{H}_b$. On a :

$$(\varphi | \psi) = (e^{-itH}\varphi | e^{-itH}\psi) = ((1 - \mathbf{1}_{B(0,R)})e^{-itH}\varphi | e^{-itH}\psi) + (\mathbf{1}_{B(0,R)}e^{-itH}\varphi | e^{-itH}\psi).$$

Le premier terme est arbitrairement petit pour R assez grand et le second l'est pour t assez grand (et en utilisant Cauchy-Schwarz). D'où $(\varphi | \psi) = 0$ et $\mathcal{H}_a \perp \mathcal{H}_b$. A l'aide des

inclusions déjà obtenues : $\mathcal{H}_a \perp \mathcal{H}_c$ et $\mathcal{H}_b \perp \mathcal{H}_{pp}$. D'où, puisque $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_c$, $\mathcal{H}_a \subset \mathcal{H}_c^\perp = \mathcal{H}_{pp}$ et $\mathcal{H}_b \subset \mathcal{H}_{pp}^\perp = \mathcal{H}_c$. D'où les égalités voulues.

3. Par un calcul précédent, pour tout $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, $(\varphi | e^{-itH}\psi) = \hat{\mu}_{\varphi, \psi}(t)$. De plus, pour tout borélien M :

$$|\mu_{\varphi, \psi}(M)| = |(E(M)\varphi | E(M)\psi) \leq \|E(M)\varphi\| \cdot \|E(M)\psi\| = |\mu_\varphi(M)|^{\frac{1}{2}} |\mu_\psi(M)|^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons à présent $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$. Alors μ_ψ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et il en est donc de même pour $\mu_{\varphi, \psi}$ pour toute $\varphi \in \mathcal{H}$. Il vient, par le lemme de Riemann-Lebesgue,

$$(\varphi | e^{-itH}\psi) = \hat{\mu}_{\varphi, \psi}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Soit φ valant 1 en x et 0 ailleurs. Alors $\varphi \in \mathcal{H}$ et $(\varphi | e^{-itH}\psi) = e^{-itH}\psi(x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$e^{-itH}\psi(x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

On obtient alors le résultat voulu par convergence bornée.

□

Le second point du théorème R.A.G.E. admet la généralisation suivante.

Proposition 3.3.3. *Soit H un opérateur auto-adjoint. Soit K un opérateur, soit compact, soit tel que $K(H+i)^{-1}$ soit compact. Alors, pour tout $\psi \in \mathcal{H}_c$,*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|Ke^{-itH}\psi\|^2 dt = 0.$$

Démonstration : Si K est compact, il est limite d'opérateurs de rang fini. Il suffit donc de montrer le résultat pour des opérateurs de rang fini. Or un tel opérateur est combinaison linéaire d'opérateurs de la forme $K = (\varphi | \cdot)\varphi$, on est donc ramené par inégalité triangulaire au point 2 du théorème R.A.G.E.

Supposons que $K(H+i)^{-1}$ est compact. Comme $D(H) \cap \mathcal{H}_c$ est dense dans \mathcal{H}_c il suffit de démontrer le résultat pour $\psi \in D(H) \cap \mathcal{H}_c$. On écrit alors

$$\|Ke^{-itH}\psi\| = \|K(H+i)^{-1}e^{-itH}(H+i)\psi\|,$$

et on est ramené au cas précédent.

□

Chapitre 4

Opérateurs aléatoires

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

4.1 Familles mesurables d'opérateurs

Nous commençons par définir la notion de mesurabilité pour une famille d'opérateurs aléatoires bornés.

Définition 4.1.1. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Soit $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille d'opérateurs bornés sur \mathcal{H} . On dit que $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable lorsque pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, $\omega \mapsto (\varphi | H_\omega \psi)$ est mesurable.

Le modèle d'Anderson discret agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ est une famille d'opérateurs bornés mesurable.

Pour passer au cas des opérateurs non bornés on va se restreindre au cas des opérateurs auto-adjoints afin de pouvoir utiliser le calcul fonctionnel des opérateurs.

Définition 4.1.2. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert. Soit $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille d'opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} . On dit que $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable lorsque pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée, $\{f(H_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable au sens des familles d'opérateurs bornés.

On peut alors montrer les caractérisations suivantes de la mesurabilité.

Proposition 4.1.3. Soit $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille d'opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} . Pour tout $\omega \in \Omega$, E_ω désigne la famille spectrale associée à H_ω . Alors :

1. $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable si et seulement si, pour tout borélien B de \mathbb{R} , $\{E_\omega(B)\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable.
2. $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable si et seulement s'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $\{(H_\omega + z)^{-1}\}_{\omega \in \Omega}$ soit mesurable.
3. $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{e^{itH_\omega}\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable.

Démonstration : Pour les détails, voir [3], Proposition V.1.2, page 243.

□

Le premier point de la proposition précédente induit un résultat de mesurabilité des projecteurs sur les différents types spectraux. Rappelons tout d'abord que le théorème spectral permet de définir pour tout borélien B de \mathbb{R} un projecteur spectral par la formule $E(B) = \chi_B(H)$. Puisque E se décompose en une somme $E = E_{pp} + E_{ac} + E_{sc}$ à partir de la décomposition de Lebesgue de la mesure spectrale de H , on peut définir, pour tout borélien B de \mathbb{R} , les projecteurs $E_{pp}(B)$, $E_{ac}(B)$ et $E_{sc}(B)$.

Proposition 4.1.4. Soit $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille d'opérateurs auto-adjoints sur \mathcal{H} telle que pour tout $\omega \in \Omega$, E_ω désigne la famille spectrale associée à H_ω . Supposons $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ mesurable. Alors pour tout borélien B de \mathbb{R} , les familles $\{E_\omega(B)\}_{\omega \in \Omega}$, $\{E_{\omega,pp}(B)\}_{\omega \in \Omega}$, $\{E_{\omega,ac}(B)\}_{\omega \in \Omega}$ et $\{E_{\omega,sc}(B)\}_{\omega \in \Omega}$ sont mesurables.

Démonstration : Voir [3], Proposition V.1.7, page 246. □

Nous allons vérifier que les opérateurs de Schrödinger que nous souhaitons étudier par la suite sont bien mesurables. Nous avons le résultat général suivant.

Proposition 4.1.5. Soit $H = -\Delta + V$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si $\{V_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est un processus stochastique mesurable en x et ω tel que pour tout ω , $H_\omega = H + V_\omega$ soit essentiellement auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable.

Démonstration : Voir [3], Proposition V.3.1, page 257. □

- Exemple 4.1.6.**
1. Le modèle d'Anderson est mesurable.
 2. Le modèle quasi-périodique est mesurable.
 3. Le modèle de déplacement aléatoire de Poisson est mesurable.

4.2 Familles ergodiques d'opérateurs

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité complet et $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ un groupe de transformations mesurables et préservant la mesure P . Un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est dit invariant sous l'action de $\{T_i\}$ lorsque $T_i^{-1}A = A$ pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$.

Alors $\{T_i\}$ est dit ergodique si tout ensemble invariant est de mesure nulle ou égale à 1. $\{T_i\}$ est ergodique si et seulement si pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable,

$$(\forall i, f(T_i\omega) = f(\omega) \text{ pour presque tout } \omega) \Rightarrow (f \text{ presque sûrement constante}).$$

Enfin si $\{T_i\}$ est ergodique, on dit qu'un potentiel $x \mapsto V_\omega(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\omega \in \Omega$ est \mathbb{Z}^d -transitif (par rapport à $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$) lorsque :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, V_{T_i\omega}(x) = V_\omega(x - i)$$

De même, si $\{T_y\}_{y \in \mathbb{R}^d}$ est un groupe de transformations mesurables et préservant la mesure P , on dit que $V_\omega(x)$ est \mathbb{R}^d -transitif (par rapport à $\{T_y\}_{y \in \mathbb{R}^d}$) lorsque :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, V_{T_y\omega}(x) = V_\omega(x - y)$$

Définition 4.2.1. On dit qu'une famille mesurable d'opérateurs auto-adjoints $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est \mathbb{Z}^d -ergodique (resp. \mathbb{R}^d -ergodique) lorsqu'il existe une famille d'opérateurs unitaires U_y définie par $U_y\phi(x) = \phi(x - y)$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \forall \omega \in \Omega, H_{T_i\omega} = U_i H_\omega U_i^*.$$

L'intérêt de cette définition est qu'alors, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $i \in \mathbb{Z}^d$, $\sigma(H_{T_i\omega}) = \sigma(H_\omega)$, ce qui va conduire à l'existence d'un ensemble déterministe égal au spectre de H_ω P -presque sûrement.

On a aussi la propriété suivante.

Proposition 4.2.2. Si la famille $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est ergodique, alors pour toute f mesurable et bornée, $\{f(H_\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ est ergodique.

4.3 Le spectre presque-sûr

On commence par un premier résultat qui nous guide vers la notion de spectre presque sûr.

Lemme 4.3.1. *Si $\{P_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est une famille ergodique de projecteurs orthogonaux, alors le rang de P_ω est P-presque-sûrement constant.*

Démonstration : Soit $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ une base hilbertienne de \mathcal{H} . Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose

$$r(\omega) := \text{Tr } P_\omega = \sum_{k \geq 1} (P_\omega \varphi_k | \varphi_k).$$

Alors r est une variable aléatoire positive et pour tout i et tout ω ,

$$r(T_i \omega) = \sum_{k \geq 1} (P_{T_i \omega} \varphi_k | \varphi_k) = \sum_{k \geq 1} (U_i^* P_\omega U_i \varphi_k | \varphi_k) = \sum_{k \geq 1} (P_\omega U_i \varphi_k | U_i \varphi_k) = \text{Tr } P_\omega = r(\omega).$$

Par ergodicité on en déduit que r est presque-sûrement constante. □

On a alors les théorèmes de Pastur et de Kunz-Souillard / Kirsch-Martinelli qui nous assure que pour une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoints, presque sûrement leur spectre est indépendant de ω .

Théorème 4.3.2. *Soit $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoints. Alors il existe un ensemble $\Sigma \subset \mathbb{R}$ fermé tel que $\Sigma = \sigma(H_\omega)$ P-presque sûrement.*

L'ensemble Σ est appelé le spectre presque sûr de la famille $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$.

Démonstration : Commençons par remarquer que puisque H_ω est auto-adjoint il est fermé, son spectre $\sigma(H_\omega)$ est donc un fermé de \mathbb{R} . D'après la structure des ouverts de \mathbb{R} comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux et à bornes rationnelles, on peut écrire :

$$\sigma(H_\omega) = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{a < b, a, b \in \mathbb{Q}, \sigma(H_\omega) \cap]a, b[= \emptyset}]a, b[\right).$$

Soient donc $a < b$ deux réels. On note :

$$\Omega_{a,b} = \{\omega \in \Omega \mid \sigma(H_\omega) \cap]a, b[= \emptyset\}.$$

Remarquons que

$$(\sigma(H_\omega) \cap]a, b[= \emptyset) \Leftrightarrow (E_\omega(]a, b[) = 0).$$

Alors, puisque $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est mesurable, $\{E_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ l'est aussi et comme $]a, b[$ est un borélien de \mathbb{R} , $\Omega_{a,b}$ est mesurable. Par ailleurs le spectre est invariant par la transformation unitaire U_i . On a donc :

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{Z}^d, T_i^{-1}(\Omega_{a,b}) &= \{\omega \in \Omega \mid \sigma(H_{T_i \omega}) \cap]a, b[= \emptyset\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \sigma(U_i H_\omega U_i^*) \cap]a, b[= \emptyset\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \sigma(H_\omega) \cap]a, b[= \emptyset\} \\ &= \Omega_{a,b}. \end{aligned}$$

Puisque la famille $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est ergodique, on en déduit que

$$P(\Omega_{a,b}) = 0 \quad \text{ou} \quad P(\Omega_{a,b}) = 1.$$

On introduit l'ensemble :

$$\Omega' = \left(\bigcap_{a < b, a, b \in \mathbb{Q}, P(\Omega_{a,b})=1} \Omega_{a,b} \right) \setminus \left(\bigcup_{c < d, c, d \in \mathbb{Q}, P(\Omega_{c,d})=0} \Omega_{c,d} \right).$$

Par dénombrabilité de \mathbb{Q} , $P(\Omega') = 1$.

Soit $\omega \in \Omega'$. Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, tels que $P(\Omega_{a,b}) = 1$, $\sigma(H_\omega) \cap]a, b[= \emptyset$. De plus, pour tous $c, d \in \mathbb{Q}$, $c < d$, tels que $P(\Omega_{c,d}) = 0$, $\omega \notin \Omega_{c,d}$, i.e., $\sigma(H_\omega) \cap]c, d[\neq \emptyset$. D'où,

$$\forall \omega \in \Omega', \quad \bigcup_{a < b, a, b \in \mathbb{Q}, \sigma(H_\omega) \cap]a, b[= \emptyset}]a, b[= \bigcup_{a < b, a, b \in \mathbb{Q}, P(\Omega_{a,b})=1}]a, b[.$$

On remarque que le membre de gauche dépend de ω , celui de droite est indépendant de ω . Posons alors

$$\Sigma = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{a < b, a, b \in \mathbb{Q}, P(\Omega_{a,b})=1}]a, b[\right).$$

L'ensemble Σ est un fermé de \mathbb{R} et on a :

$$\forall \omega \in \Omega', \quad \sigma(H_\omega) = \Sigma.$$

D'où le résultat voulu puisque $P(\Omega') = 1$.

□

La démonstration que l'on vient de faire se transpose directement aux cas des types spectraux en remplaçant le projecteur E_ω par les projecteurs $E_{\omega,pp}$, $E_{\omega,ac}$ et $E_{\omega,sc}$.

Théorème 4.3.3. Soit $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoints. Alors il existe des ensembles Σ_{pp} , Σ_{sc} et Σ_{ac} fermés dans \mathbb{R} tels que P-presque sûrement,

$$\Sigma_{pp} = \sigma_{pp}(H_\omega), \quad \Sigma_{sc} = \sigma_{sc}(H_\omega) \quad \text{et} \quad \Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(H_\omega).$$

On a enfin un résultat sur les spectres essentiel et discret.

Théorème 4.3.4. Soit $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ une famille ergodique d'opérateurs auto-adjoints. Alors le spectre essentiel et le spectre discret de H_ω sont P-presque sûrement constant.

Démonstration : Encore une fois, la démonstration du théorème d'Ishii-Pastur s'adapte directement à ces deux types de spectre en considérant les projecteurs spectraux associés.

□

4.4 Exemples de spectres presque-sûrs

4.4.1 Le modèle d'Anderson discret

Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ un espace de probabilité complet et posons

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = \left(\bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\Omega}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathcal{A}}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}^d} \tilde{P} \right).$$

Nous allons calculer le spectre presque sûr de la famille ergodique d'opérateurs $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ par :

$$(h_\omega u)_n = - \sum_{|m-n|=1} u_m + V_\omega(n)u_n$$

où, pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{Z}^d$, $V_\omega(n)$ est une variable aléatoire sur $\tilde{\Omega}$. On suppose cette famille de variables aléatoires *i.i.d.*.

Justifions brièvement l'ergodicité de cette famille aléatoire. Tout d'abord, on pose pour tout $i \in \mathbb{Z}^d$ et tout $\omega \in \Omega$, $T_i(\omega) = (\omega_{n+i})_{n \in \mathbb{Z}^d}$. Alors les transformations T_i préservent la mesure produit P puisque P est le produit de copies de la même mesure. De plus, la famille $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ ainsi définie est ergodique. En effet, on montre que pour tous $A, B \in \mathcal{A}$,

$$P(T_i^{-1}A \cap B) \xrightarrow{\|i\|_\infty \rightarrow \infty} P(A)P(B). \quad (4.1)$$

Rappelons que par définition de la tribu produit, \mathcal{A} est la tribu engendrée par les cylindres de la forme

$$\{\omega \in \Omega \mid \omega_{i_1} \in \tilde{\mathcal{A}}, \dots, \omega_{i_k} \in \tilde{\mathcal{A}}\}.$$

Si A et B sont de tels cylindres alors par définition de la mesure produit et puisque chaque T_i préserve la mesure, on a bien (4.1). Puisque l'ensemble des A et B tels que (4.1) soit vérifiée est une tribu et que les cylindres engendrent \mathcal{A} , (4.1) est vraie sur \mathcal{A} . Soit maintenant M un ensemble invariant sous l'action de $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$. Alors, en appliquant (4.1) avec $A = B = M$ on obtient

$$P(M) = P(M \cap M) = P(T_i^{-1}M \cap M) \xrightarrow{\|i\|_\infty \rightarrow \infty} P(M)P(M) = P(M)^2.$$

On a bien que $P(M)$ vaut 0 ou 1. Finalement, la famille $\{T_i\}_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est ergodique. On peut alors définir les opérateurs unitaires U_i comme étant les translations :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d), \forall n \in \mathbb{Z}^d, (U_i u)_n = u_{n-i}.$$

On a alors bien la relation :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \forall \omega \in \Omega, h_{T_i \omega} = U_i h_\omega U_i^*.$$

Comme les $V_\omega(n)$ sont *i.i.d.*, on note ν leur loi commune. Le support de ν est par définition

$$\text{supp } \nu = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0, \nu((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) > 0\}.$$

Posons par ailleurs :

$$\ell_0^2(\mathbb{Z}^d) = \{u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \mid u_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ excepté un nombre fini}\}.$$

Comme le laplacien discret est borné, par le théorème de Kato-Rellich, h_ω est essentiellement auto-adjoint sur $\ell_0^2(\mathbb{Z}^d)$.

On commence par prouver un lemme sur le potentiel aléatoire.

Lemme 4.4.1. *Il existe un ensemble $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que : pour tout $\omega \in \Omega_0$, pour tout ensemble fini $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, pour toute suite $(q_i)_{i \in \Lambda}$ d'éléments $q_i \in \text{supp } \nu$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{Z}^d telle que $\|j_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et*

$$\sup_{i \in \Lambda} |q_i - V_\omega(i + j_n)| < \varepsilon.$$

Démonstration : On fixe un ensemble fini $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, une suite $(q_i)_{i \in \Lambda}$ d'éléments $q_i \in \text{supp } \nu$, et un $\varepsilon > 0$. Par définition du support et par la caractère *i.i.d.* des $V_\omega(i)$, on a $P(A) > 0$ où A est l'évènement $A = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{i \in \Lambda} |q_i - V_\omega(i)| < \varepsilon\}$.

Soit une suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{Z}^d telle que la distance entre deux termes l_n et l_m ($n \neq m$) est supérieure à deux fois le diamètre de Λ . Alors, par invariance en loi par translation et par indépendance, les évènements

$$A_n = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{i \in \Lambda} |q_i - V_\omega(i + l_n)| < \varepsilon\}.$$

sont indépendants et vérifient pour tout n , $P(A_n) = P(A) > 0$. Par le lemme de Borel-Cantelli, l'évènement

$$\Omega_{\Lambda, \{q_i\}, \varepsilon} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ une infinité de fois}\}$$

est de probabilité 1. Par ailleurs, puisque $\text{supp } \nu \subset \mathbb{R}$, il contient un sous-ensemble dénombrable dense que l'on note S . De plus, l'ensemble F_d des sous-parties finies de \mathbb{Z}^d est aussi dénombrable, donc :

$$\Omega_0 = \bigcap_{\Lambda \in F_d, (q_i) \in S^\Lambda, n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{\Lambda, (q_i), \frac{1}{n}}$$

est une intersection dénombrable d'ensembles de probabilité 1, on a donc $P(\Omega_0) = 1$. Donc Ω_0 convient. □

On peut alors calculer le spectre presque-sûr de $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$.

Théorème 4.4.2. *Pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, $\sigma(h_\omega) = [-2d, 2d] + \text{supp } \nu$.*

Démonstration : Rappelons tout d'abord que le spectre d'un opérateur de multiplication est donné par la fermeture de l'image de la fonction qui le définit. Ainsi, presque sûrement, $\sigma(V_\omega) = \text{supp } \nu$. De plus, le spectre du laplacien discret est déterministe et donné par $[-2d, 2d]$. Or, comme V_ω est borné et symétrique et $-\Delta_{\text{disc}}$ est borné aussi, on a d'après [8, Theorem 4.10, Chapter V], pour presque tout ω ,

$$\sigma(-\Delta_{\text{disc}} + V_\omega) \subset \sigma(-\Delta_{\text{disc}}) + \sigma(V_\omega) = [-2d, 2d] + \text{supp } \nu.$$

Réciproquement, soit $\lambda \in [-2d, 2d] + \text{supp } \nu$. On écrit $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, $\lambda_0 \in [-2d, 2d]$ et $\lambda_1 \in \text{supp } \nu$. Comme h_ω est essentiellement auto-adjoint sur $\ell_0^2(\mathbb{Z}^d)$, par le critère de Weyl, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\ell_0^2(\mathbb{Z}^d)$ de norme 1 et telle que

$$\|(-\Delta_{\text{disc}} - \lambda_0)u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par ailleurs, comme $\lambda_1 \in \text{supp } \nu$, par le lemme 4.4.1, il existe une suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{Z}^d telle que $\|j_n\|_\infty$ tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini et pour tout $n \geq 1$

$$\sup_{i \in \text{supp } u_n} |V_\omega(i + j_n) - \lambda_1| < \frac{1}{n}.$$

Posons enfin $v_n = u_{n-j_n}$. Alors $\|v_n\|_2 = 1$ pour tout n et, pour presque tout ω ,

$$\begin{aligned} \|(h_\omega - \lambda)v_n\| &\leq \|(-\Delta_{\text{disc}} - \lambda_0)v_n\| + \|(V_\omega - \lambda_1)v_n\| \\ &\leq \|(-\Delta_{\text{disc}} - \lambda_0)u_n\| + \|(V_\omega - \lambda_1)v_n\| \\ &\leq \|(-\Delta_{\text{disc}} - \lambda_0)u_n\| + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour presque tout ω , $\|(h_\omega - \lambda)v_n\|$ tend vers 0 et par le critère de Weyl, $\lambda \in \sigma(h_\omega)$. On obtient donc presque sûrement l'égalité voulue.

□

4.4.2 Un modèle d'Anderson continu quasi unidimensionnel

Consider the random family of matrix-valued one-dimensional Anderson-Bernoulli operators

$$H_l(\omega) = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + V + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^{(n)} \mathbf{1}_{[0,l]}(x - ln) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & & c_N \omega_N^{(n)} \mathbf{1}_{[0,l]}(x - ln) \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

acting on $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$, where $N \geq 1$ is an integer, I_N is the identity matrix of order N and $l > 0$ is a real number. The matrix V is a real $N \times N$ symmetric matrix, the space of these matrices being denoted by $S_N(\mathbb{R})$. The constants c_1, \dots, c_N are non-zero real numbers.

For every $i \in \{1, \dots, N\}$, $(\omega_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d., for short) random variables on a complete probability space $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{P}_i)$, of common law ν_i such that $\{0, 1\} \subset \text{supp } \nu_i$ and $\text{supp } \nu_i$ is bounded. In particular, the $\omega_i^{(n)}$'s can be Bernoulli random variables. The family $\{H_l(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ is a family of random operators indexed by the product space

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = \left(\bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\Omega}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\Omega}_N), \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\mathcal{A}}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{A}}_N), \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{P}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{P}_N) \right).$$

We also set, for every $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)})$, which is a random variable on $(\tilde{\Omega}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\Omega}_N, \tilde{\mathcal{A}}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{A}}_N, \tilde{P}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{P}_N)$ of law $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N$. The expectation value with respect to P will be denoted by $\mathbb{E}(\cdot)$.

As a bounded perturbation of $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N$, the operator $H_l(\omega)$ is self-adjoint on the Sobolev space $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ and thus, for every $\omega \in \Omega$, the spectrum of $H_l(\omega)$, denoted by $\sigma(H_l(\omega))$, is included in \mathbb{R} . Moreover, because of the periodicity in law of the random potential of $H_l(\omega)$, the family $\{H_l(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ is $l\mathbb{Z}$ -ergodic. Thus, there exists $\Sigma \subset \mathbb{R}$ such that, for P -almost every $\omega \in \Omega$, $\Sigma = \sigma(H_l(\omega))$. There also exist Σ_{pp} , Σ_{ac} and Σ_{sc} , subsets of \mathbb{R} , such that, for P -almost every $\omega \in \Omega$, $\Sigma_{\text{pp}} = \sigma_{\text{pp}}(H_l(\omega))$, $\Sigma_{\text{ac}} = \sigma_{\text{ac}}(H_l(\omega))$ and $\Sigma_{\text{sc}} = \sigma_{\text{sc}}(H_l(\omega))$, respectively the pure point, absolutely continuous and singular continuous spectrum of $H_l(\omega)$.

We can give an explicit description of the almost-sure spectrum Σ of $\{H_l(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$. For $\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \dots, \omega_N^{(0)}) \in \text{supp } (\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N)$, we denote by $E_1^{\omega^{(0)}}, \dots, E_N^{\omega^{(0)}}$ the real eigenvalues of the real symmetric matrix $V + \text{diag}(c_1 \omega_1^{(0)}, \dots, c_N \omega_N^{(0)})$. Then, we have

$$\Sigma = [0, +\infty) + \bigcup_{\omega^{(0)} \in \text{supp } (\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N)} \{E_1^{\omega^{(0)}}, \dots, E_N^{\omega^{(0)}}\}. \quad (4.3)$$

In particular, Σ does not depend on the parameter l . In the proof, we will use the specific form of the potential, in particular the fact that V is constant and, in the random part, the fact that the single site potential is of the form $\mathbf{1}_{[0,l]}$ instead of a generic single site potential $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ supported on $[0, l]$.

We fix $l > 0$. Let $\omega \in \Omega$ and $n \in \mathbb{Z}$. If V is a matrix in $S_N(\mathbb{R})$, we set

$$V_{\omega^{(n)}} = V + \text{diag}(c_1 \omega_1^{(n)}, \dots, c_N \omega_N^{(n)}) \in S_N(\mathbb{R}). \quad (4.4)$$

Let $x \in \mathbb{R}$. We set

$$V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[0,l]}(x - ln) \otimes V_{\omega^{(n)}}. \quad (4.5)$$

We denote by V_ω the maximal multiplication operator by the function $x \mapsto V_\omega(x)$. Since $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of i.i.d. random variables and since for every $n \in \mathbb{Z}$ the function $x \mapsto \mathbf{1}_{[0,l]}(x - ln) \otimes V_{\omega^{(n)}}$ is constant on $[ln, l(n+1)]$, the almost-sure spectrum of the $l\mathbb{Z}$ -ergodic family $\{V_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ is

$$\Sigma(V_\omega) = \bigcup_{\omega^{(0)} \in \text{supp}(v_1 \otimes \dots \otimes v_N)} \{E_1^{\omega^{(0)}}, \dots, E_N^{\omega^{(0)}}\}. \quad (4.6)$$

We recall that if we consider the operator $-\frac{d^2}{dx^2}$ on $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ of domain $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, we have

$$\sigma\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) = [0, +\infty). \quad (4.7)$$

Now, since the operator $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N$ is deterministic, its almost-sure spectrum is

$$\Sigma\left(-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N\right) = [0, +\infty). \quad (4.8)$$

For any $\omega \in \Omega$, V_ω is a bounded self-adjoint operator on $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ and $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N$ is self-adjoint on $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$. Then, adapting the proof of [8, Theorem 4.10, Chapter V], we get that every $\lambda \in \Sigma$ satisfies $\lambda \in \Sigma(-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N) + \Sigma(V_\omega)$ and thus, $\Sigma \subset \Sigma(-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N) + \Sigma(V_\omega)$. Indeed, if $\lambda < \min(0, \inf \Sigma(V_\omega))$ then it is almost-surely in the resolvent set of $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + V_\omega$. At least, a direct application of the result of Kato leads to

$$\sigma \subset [-\max(|\inf \Sigma(V_\omega)|, |\sup \Sigma(V_\omega)|), +\infty).$$

Conversely, let $\alpha \in \Sigma(-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N)$ and let $\beta \in \Sigma(V_\omega)$. Then, $\alpha \in [0, +\infty)$ and in particular, $\alpha \in \sigma(-\frac{d^2}{dx^2})$. One can find a sequence $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ of elements of $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ such that

- (i) $\|g_p\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}} = 1$ for every $p \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\| -g_p'' - \alpha g_p \|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}}$ tends to 0 as p tends to infinity,
- (iii) $\text{supp } g_p \subset [-(p+1), (p+1)]$ for every $p \in \mathbb{N}$.

To construct such a sequence $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$, we can consider a solution of the ordinary differential equation $-u'' = \alpha u$, for example the function $u : x \mapsto e^{i\sqrt{\alpha}x}$. Then, we multiply this solution by a sequence of functions $(\chi_p)_{p \in \mathbb{N}}$ which are compactly supported in the interval $[-(p+1), (p+1)]$, constant on the interval $[-p, p]$ and such that $\|\chi_p\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}} = 1$ for every $p \in \mathbb{N}$.

Let $m \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}$. We set

$$\Omega_n^{(m)} = \{\omega \in \Omega ; \beta \in \sigma(V_{\omega^{(n)}}) \text{ and } \omega^{(n)} = \omega^{(n+1)} = \dots = \omega^{(n+m)}\}, \quad (4.9)$$

where $\sigma(V_{\omega^{(n)}}) = \{E_1^{\omega^{(n)}}, \dots, E_N^{\omega^{(n)}}\}$. We remark that

$$\Sigma(V_\omega) = \bigcup_{\omega^{(0)} \in \text{supp}(v_1 \otimes \dots \otimes v_N)} \sigma(V_{\omega^{(0)}}) = \bigcup_{\omega^{(n)} \in \text{supp}(v_1 \otimes \dots \otimes v_N)} \sigma(V_{\omega^{(n)}}), \text{ for any } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

We also set

$$\Omega^{(m)} = \{\omega \in \Omega ; \beta \in \sigma(V_{\omega^{(n)}}) \text{ and } \omega^{(n)} = \dots = \omega^{(n+m)} \text{ for infinitely many } n \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.11)$$

Since $(\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of i.i.d. random variables, we have

$$P(\Omega_i^{(m)}) = P(\Omega_j^{(m)}) \text{ for any } (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \text{ such that } i \neq j. \quad (4.12)$$

Moreover, as $\beta \in \Sigma(V_\omega)$, by (4.10) and the fact that the random variables $\omega^{(n)}$ are i.i.d., we have

$$P(\Omega_n^{(m)}) > 0 \text{ for any } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Finally, the events $(\Omega_{(m+1)n}^{(m)})_{n \in \mathbb{Z}}$ are independent and we can apply Borel-Cantelli's lemma to obtain

$$P(\Omega^{(m)}) = 1 \text{ for any } m \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

We set

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega ; \forall m \in \mathbb{N}, \beta \in \sigma(V_{\omega^{(n)}}) \text{ and } \omega^{(n)} = \dots = \omega^{(n+m)} \text{ for infinitely many } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Then, Ω_1 is the countable intersection of the $\Omega^{(m)}$ and, by (4.14), $P(\Omega_1) = 1$. We set

$$\Omega_2 = \{\omega \in \Omega ; \sigma(H_l(\omega)) = \Sigma\}.$$

By definition of Σ , we have $P(\Omega_2) = 1$. Thus, if we set $\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2$, we have $P(\Omega_0) = 1$. In particular, $\Omega_0 \neq \emptyset$. We fix $\omega \in \Omega_0$.

Let $p \in \mathbb{N}$ and let $m \in \mathbb{N}$ such that $m > 2p + 2$. Since $\omega \in \Omega_0$, there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that $\beta \in \sigma(V_{\omega^{(n)}})$ and $\omega^{(n+i)} = \omega^{(n)}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}$. Since properties (i), (ii) and (iii) of $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ are invariant by translation, one may assume that $\text{supp } g_p \subset [n, n+m]$. Moreover, since $\omega^{(n+i)} = \omega^{(n)}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}$, $V_{\omega^{(n+i)}} = V_{\omega^{(n)}}$ for every $i \in \{1, \dots, m\}$. Since $\beta \in \sigma(V_{\omega^{(n)}})$, one can find an eigenvector $f_n \in \mathbb{C}^N$ of the matrix $V_{\omega^{(n)}}$ associated to β which is also an eigenvector of $V_{\omega^{(n+i)}}$ associated to β for every $i \in \{1, \dots, m\}$. We can assume that $\|f_n\|_{\mathbb{C}^N} = 1$, where $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^N}$ is any norm on \mathbb{C}^N .

Then, we set $f \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ which is equal to f_n on $[n, n+m]$ and equal to 0 on $\mathbb{R} \setminus [n, n+m]$. We have

$$(V_\omega - \beta) \cdot f = \sum_{j=n}^{n+m} (V_{\omega^{(j)}} - \beta) \cdot f_n + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{n, \dots, n+m\}} (V_{\omega^{(j)}} - \beta) \cdot 0 = 0, \quad (4.15)$$

since f_n is a common eigenvector to the matrices $V_{\omega^{(j)}}$ for $j \in \{n, \dots, n+m\}$.

Now we can define $h_p = g_p f$ for every $p \in \mathbb{N}$. Then $h_p \in H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ because $g_p \in H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, $\text{supp } g_p \subset [n, n+m]$ and $f \in L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ is constant on $[n, n+m]$. We have

$$\begin{aligned} \|h_p\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \|g_p(x)f(x)\|_{\mathbb{C}^N}^2 dx \\ &= \int_{[n, n+m]} |g_p(x)|^2 \|f_n\|_{\mathbb{C}^N}^2 dx \\ &= \int_{[n, n+m]} |g_p(x)|^2 dx = \|g_p\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N} = 1, \end{aligned} \quad (4.16)$$

since $\text{supp } g_p \subset [n, n+m]$. We also have, using (4.15),

$$\begin{aligned} \|(H_l(\omega) - (\alpha + \beta)) \cdot h_p\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N} &= \left\| \left(-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N - \alpha \right) \cdot h_p + (V_\omega - \beta) \cdot h_p \right\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N} \\ &= \left\| (-g_p'' - \alpha g_p)f + g_p(V_\omega - \beta) \cdot f \right\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N} \\ &= \left\| (-g_p'' - \alpha g_p)f \right\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N} \\ &\leq \left\| -g_p'' - \alpha g_p \right\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}} \times \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x)\|_{\mathbb{C}^N}^2 \right) \\ &= \left\| -g_p'' - \alpha g_p \right\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}}', \end{aligned}$$

by $\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x)\|_{\mathbb{C}^N}^2 = \|f_n\|_{\mathbb{C}^N}^2 = 1$. By (ii), we obtain that $\|(H_l(\omega) - (\alpha + \beta)) \cdot h_p\|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N}$ tends to 0 when p tends to infinity. Combining this with (4.16) and applying Weyl's criterion with the sequence $(h_p)_{p \in \mathbb{N}}$, we obtain $\alpha + \beta \in \sigma(H_l(\omega))$. Since $\omega \in \Omega_2$, we have $\alpha + \beta \in \Sigma$. Thus, $\Sigma(-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N) + \Sigma(V_\omega) \subset \Sigma$ and finally

$$\Sigma = \Sigma\left(-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N\right) + \Sigma(V_\omega) = [0, +\infty) + \bigcup_{\omega^{(0)} \in \text{supp}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)} \{E_1^{\omega^{(0)}}, \dots, E_N^{\omega^{(0)}}\}. \quad (4.17)$$

Chapitre 5

Exposants de Lyapunov

Le but de ce chapitre est de présenter comment s'étudie la convergence des suites de produits de matrices aléatoires *i.i.d.*. En particulier, on cherche à comprendre comment se généralise la loi des grands nombres à ce cadre.

Dans toute la suite, $N \geq 1$ désigne un entier.

5.1 Exposant de Lyapunov dominant et théorème de Fürstenberg-Kesten

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité complet. Nous commençons par introduire l'exposant de Lyapunov dominant d'une suite de matrices aléatoires *i.i.d.* de $GL_N(\mathbb{R})$, soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 5.1.1. On suppose que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ \|A_0^\omega\|)$ est finie. Alors la limite suivante appartient à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|A_{n-1}^\omega \cdots A_0^\omega\|)$$

Nous l'appelons l'exposant de Lyapunov dominant associé à la suite $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par équivalence des normes en dimension finie, γ ne dépend pas du choix de la norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Démonstration : Posons $S_n = A_{n-1}^\omega \cdots A_0^\omega$. Alors, quitte à choisir une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on a

$$\|S_n\| \leq \|A_{n-1}^\omega\| \cdots \|A_0^\omega\|$$

Puis, sous l'hypothèse que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ \|A_0^\omega\|)$ est finie, on a aussi l'intégrabilité de $\log^+ \|S_n\|$ par indépendance et multiplicativité de l'espérance dans le cas indépendant. On peut alors écrire, pour tous $p, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\log^+ \|S_{n+p}\|) &\leq \mathbb{E}(\log \|A_{n+p}^\omega \cdots A_n^\omega\|) + \mathbb{E}(\log \|A_{n-1}^\omega \cdots A_0^\omega\|) \\ &= \mathbb{E}(\log^+ \|S_p\|) + \mathbb{E}(\log^+ \|S_n\|) \end{aligned}$$

en utilisant le caractère *i.i.d.* dans le premier terme. Ainsi, la suite $(\mathbb{E}(\log^+ \|S_n\|))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive et $\frac{1}{n} \mathbb{E}(\log^+ \|S_n\|)$ converge vers $\inf_{m \geq 1} \frac{1}{m} \mathbb{E}(\log^+ \|S_m\|)$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. □

Exemple 5.1.2. Si on suppose que chaque matrice A_n^ω est diagonale de coefficients diagonaux $a_{n,i}^\omega$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$, alors $\gamma = \sup_i \mathbb{E}(\log |a_{0,i}^\omega|)$ et par la loi forte des grands nombres usuelle, $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|S_n\|)$ pour presque tout ω .

Ainsi la convergence en espérance est obtenue aisément. Cette convergence a aussi lieu presque sûrement, ce qui est un résultat moins évident. Il est possible de le démontrer directement à l'aide de la théorie des cocycles comme cela est fait dans [1]. La convergence presque sûre est aussi une conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingman.

Soit T un ensemble qui peut être soit \mathbb{N} ou \mathbb{Z} , soit \mathbb{R} ou $[0, +\infty)$. On considère alors un semi-groupe $\Theta = \{\theta_t \mid t \in T\}$ de transformations de Ω qui préservent P . On appelle alors le quadruplet $(\Omega, \mathcal{A}, \Theta, P)$ un système dynamique.

On dit qu'une variable aléatoire Z sur Ω est invariante par rapport à Θ lorsque pour tout $t \in T$, $Z \circ \theta_t = Z$. Enfin, un système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \Theta, P)$ est dit ergodique lorsque toute variable aléatoire invariante par Θ est P -presque sûrement constante.

Définition 5.1.3. Un processus aléatoire réel $\{X(t) \mid t \in T\}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \Theta, P)$ est dit sous-additif lorsque

$$X(0) = 0 \text{ et } \forall s, t \in T, X(t+s) \leq X(t) + X(s) \circ \theta_t.$$

Dans le cas d'une égalité, on parle de processus additif.

Théorème 5.1.4 (Kingman discret). Soit $\{X(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ un processus sous-additif tel que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X(n)$ est intégrable,
2. La suite $(\frac{1}{n}\mathbb{E}(X(n)))_{n \geq 1}$ est bornée inférieurement.

Alors, il existe une variable aléatoire Z invariante par rapport à Θ telle que $(\frac{1}{n}X(n))_{n \geq 1}$ converge P -presque sûrement et en espérance vers Z . De plus, $\mathbb{E}(Z) = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n}\mathbb{E}(X(n))$.

A l'aide de ce théorème, on peut démontrer le théorème de Fürstenberg-Kesten.

Théorème 5.1.5 (Fürstenberg-Kesten). Soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires i.i.d. de $GL_N(\mathbb{R})$. On suppose que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ \|A_0^\omega\|)$ est finie. Alors, P -presque sûrement la limite suivante existe et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega\| = \gamma,$$

l'exposant de Lyapunov dominant.

Démonstration : **Cas 1.** Supposons $\gamma \in \mathbb{R}$. Alors, le processus $(\log(\|S_n\|))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additif pour $\Theta = \{\text{Id}\}$ et les hypothèses du théorème de Kingman sont vérifiées par la démonstration de la Définition 5.1.1. D'où le résultat dans ce cas.

Cas 2. Supposons $\gamma = -\infty$. Dans ce cas on ne peut plus directement appliquer le théorème de Kingman. Toutefois, fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $n \geq 1$, effectuons la division euclidienne de n par m , $n = qm + r$ avec $q \geq 0$ et $0 \leq r < m$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log(\|S_n\|) &\leq \frac{1}{n} \log(\|A_{n-1}^\omega \dots A_{qm+1}^\omega\|) + \frac{1}{n} \log(\|A_{qm}^\omega \dots A_0^\omega\|) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=qm+1}^{n-1} \log(\|A_i^\omega\|) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{q-1} \log(\|A_{(j+1)m}^\omega \dots A_{jm+1}^\omega\|) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=qm+1}^{n-1} \log(\|A_i^\omega\|) + \frac{1}{m} \left(\frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \log(\|A_{(j+1)m}^\omega \dots A_{jm+1}^\omega\|) \right). \end{aligned}$$

La première somme a un nombre fini fixé de termes majoré par m qui est indépendant de n . Donc le premier terme de la majoration tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Pour le second terme, on peut appliquer la loi des grands nombres usuelle pour obtenir

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \log(\|A_{(j+1)m}^\omega \dots A_{jm+1}^\omega\|) = \mathbb{E}(\log(\|A_{m-1}^\omega \dots A_0^\omega\|)),$$

Comme q tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini, on en déduit que

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|S_n\|) \leq \frac{1}{m} \mathbb{E}(\log(\|A_m^\omega \cdots A_1^\omega\|)).$$

En faisant tendre m vers l'infini on obtient finalement

$$-\infty \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|S_n\|) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|S_n\|) \leq \gamma = -\infty.$$

Donc la conclusion du théorème est vraie avec la limite et γ valant $-\infty$.

□

5.2 Suites de matrices aléatoires dans $GL_2(\mathbb{R})$

Avant de passer au cas général, voyons ce qui se passe dans le cas de produits de matrices aléatoires inversibles 2×2 , les interprétations géométriques étant plus simple dans ce cas.

5.2.1 Théorème de Fürstenberg

On souhaite trouver des conditions simples permettant d'affirmer que pour deux vecteurs non nuls x et y dans \mathbb{R}^N , les vecteurs aléatoires $S_n x$ et $S_n y$ tendent à s'aligner dans la même direction exponentiellement vite.

Pour $x \in \mathbb{R}^N$ non nul, on considère \bar{x} sa classe dans $P(\mathbb{R}^N)$ et si $M \in GL_N(\mathbb{R})$, on pose $M\bar{x} = \overline{Mx}$. Puis, si x et y sont deux vecteurs unitaires dans \mathbb{R}^N , on définit leur distance par

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = (1 - (x|y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

qui est le module du sinus de l'angle entre \bar{x} et \bar{y} lorsque $N = 2$. On suppose maintenant que $N = 2$. Dans ce cas, si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ alors

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\|x\| \|y\|}$$

et cela définit bien une distance sur $P(\mathbb{R}^2)$. Quitte à remplacer chaque A_n^ω par $|\det(A_n^\omega)|^{-\frac{1}{2}} A_n^\omega$, ce qui ne change rien à $S_n \bar{x}$ (puisque l'on est dans l'espace projectif), on peut supposer que $|\det(A_n^\omega)| = 1$. Dans ce cas, un calcul direct pour $S_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $|ad - bc| = 1$ donne que

$$\delta(S_n \bar{x}, S_n \bar{y}) = \frac{\|x\| \|y\|}{\|S_n x\| \|S_n y\|} \delta(\bar{x}, \bar{y}).$$

Or, si $\gamma > 0$, on est assuré qu'il existe une seule direction du plan dans laquelle $\|S_n x\|$ décroît exponentiellement. C'est l'énoncé du théorème d'Oseledets qui nous assure que si $\bar{x} \neq \bar{y}$, alors l'une des deux normes $\|S_n x\|$ ou $\|S_n y\|$ croît exponentiellement vers $+\infty$. Ainsi on a toujours que la distance $\delta(S_n \bar{x}, S_n \bar{y})$ décroît exponentiellement vers 0.

Théorème 5.2.1 (Oseledets dans $SL_2(\mathbb{R})$). *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $SL_2(\mathbb{R})$ telle que*

- (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|A_n\| = 0$
- (ii) $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\|A_n \cdots A_1\|) > 0$.

Alors il existe un sous-espace $V_- \subset \mathbb{R}^2$ de dimension 1 tel que

1. $\forall v \in V_-, v \neq 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\|A_n \cdots A_1 v\|) = -\gamma$
2. $\forall v \notin V_-, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\|A_n \cdots A_1 v\|) = \gamma.$

On cherche donc des conditions pour avoir $\gamma > 0$. Ces conditions sont données par le théorème de Fürstenberg.

Théorème 5.2.2 (Fürstenberg). Soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires dans $GL_2(\mathbb{R})$ de loi commune μ . Soit G_μ le plus petit sous-groupe fermé de $GL_2(\mathbb{R})$ contenant le support de μ , appelé sous-groupe de Fürstenberg associé à $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$. Supposons

- (i) Pour tout $M \in G_\mu, |\det(M)| = 1,$
- (ii) G_μ n'est pas compact,
- (iii) il n'existe pas de réunion finie L de droites de \mathbb{R}^2 telle que $M(L) = L$ pour tout $M \in G_\mu.$

Alors,

1. Pour tous $\bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^2),$ P-presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(S_n \bar{x}, S_n \bar{y}) = 0.$$

2. Si $\mathbb{E}(\log^+(\|A_0^\omega\|))$ est finie, il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0,$ P-presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|S_n x\|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|S_n\|) = \gamma.$$

L'hypothèse (iii) peut être difficile à vérifier. Toutefois, si μ est telle que (i) et (ii) sont vraies, alors (iii) est équivalent à la propriété (iii)' suivante

$$(iii)' \quad \forall \bar{x} \in P(\mathbb{R}^2), \#\{M \cdot \bar{x} \mid M \in G_\mu\} \geq 3.$$

Pour une démonstration de cette équivalence, voir [1][Proposition 4.3], page 31.

5.2.2 Application au modèle d'Anderson discret 1d à valeurs scalaires

Nous allons appliquer le théorème de Fürstenberg à un premier exemple de suite de matrices aléatoires *i.i.d.* dans $GL_2(\mathbb{R})$ issu du modèle d'Anderson discret en dimension 1 et à valeurs scalaires.

Soit $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ un espace de probabilité complet et soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi commune ν telle qu'il existe $a \neq b, \{a, b\} \subset \text{supp } \nu$ et $\text{supp } \nu$ est borné. Posons

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \left(\bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\Omega}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{A}}, \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbb{P}} \right).$$

Si

$$h_\omega : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} & \mapsto & -(u_{n+1} + u_{n-1}) + \omega_n u_n \end{array}$$

alors $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est une famille ergodique d'opérateurs aléatoires de spectre presque-sûr $[-2, 2] + \text{supp } \nu.$

On souhaite étudier le comportement asymptotique des fonctions propres généralisées de $h_\omega.$ Si E est dans le spectre presque-sûr de $h_\omega,$ on cherche donc à comprendre le comportement asymptotique des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, -(u_{n+1} + u_{n-1}) + \omega_n u_n = E u_n.$$

Cette équation s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_n - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Posons alors :

$$T_n^\omega(E) = \begin{pmatrix} \omega_n - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $T_n^\omega(E)$ est appelée matrice de transfert en n . La suite $(T_n^\omega(E))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de matrices aléatoires dans $SL_2(\mathbb{R})$, indépendantes et identiquement distribuées, de loi commune μ induite par la loi ν des variables aléatoires ω_n .

Le comportement asymptotique de $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ se ramène, par itération de (5.1), à celui du produit $T_n^\omega(E) \cdots T_0^\omega(E)$. L'exposant de Lyapunov dominant de cette suite de matrices est bien défini et nous allons montrer qu'il est strictement positif.

Puisque les matrices de transfert sont *i.i.d.*, le plus petit sous-groupe de $SL_2(\mathbb{R})$ contenant le support de μ est décrit par

$$G_\mu = \overline{\langle \{T_0^\omega(E) \mid \omega_0 \in \text{supp } \nu\} \rangle}.$$

Tout d'abord, on a bien que les matrices dans G_μ sont toutes de déterminant 1. Montrons que G_μ n'est pas compact. Pour cela, nous allons exhiber une suite non bornée dans G_μ . Par hypothèse sur la loi de ω_0 , on a

$$\left\langle \left(\begin{array}{cc} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\rangle \subset G_\mu.$$

Puis,

$$\left(\begin{array}{cc} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{array} \right) \in G_\mu$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{array} \right)^n = \left(\begin{array}{cc} 1 & n(a-b) \\ 0 & 1 \end{array} \right) \in G_\mu$$

qui contient donc une suite non bornée puisque $a - b \neq 0$.

Il reste à montrer que pour tout $\bar{x} \in P(\mathbb{R}^2)$, $\#\{M\bar{x} \mid M \in G_\mu\} \geq 3$. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. Supposons que $x_2 \neq 0$. Alors, on montre par simple résolution de systèmes que pour $A = \begin{pmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, les vecteurs Ax , A^2x et A^3x sont non colinéaires deux à deux ce qui permet de construire 3 éléments distincts dans $\{M\bar{x} \mid M \in G_\mu\}$. Si $x_2 = 0$ alors $x_1 \neq 0$ et on considère $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b-E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G_\mu$ puis les vecteurs Bx , B^2x et B^3x qui sont non colinéaires deux à deux.

Ainsi, le théorème de Fürstenberg s'applique et nous assure que l'exposant de Lyapunov associé à la suite des matrices de transfert est strictement positif. On a plus précisément : $\forall E \in \mathbb{R}$, $\gamma(E) > 0$.

Par le théorème d'Oseledets, il existe P-presque sûrement uniquement des solutions exponentiellement croissantes ou exponentiellement décroissantes à l'équation $h_\omega u = Eu$. Une solution exponentiellement décroissante (en $+\infty$), ne s'obtient que pour une condition initiale $v_{+\infty} \in V_-^+$. Toute autre condition initiale conduit à une solution exponentiellement croissante en $+\infty$.

On peut définir l'exposant de Lyapunov en $-\infty$ par la formule :

$$\gamma_-(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|(T_{-n+1}^\omega(E))^{-1} \cdots (T_0^\omega(E))^{-1}\|)$$

Puisque $(T_{-n+1}^\omega(E))^{-1} \cdots (T_0^\omega(E))^{-1} = (T_0^\omega(E) \cdots T_{-n+1}^\omega(E))^{-1}$, on a par le caractère *i.i.d.*,

$$\mathbb{E}(\log \|(T_{-n+1}^\omega(E))^{-1} \cdots (T_0^\omega(E))^{-1}\|) = \mathbb{E}((S_n(E))^{-1})$$

Or, si $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a ${}^t(JS_n(E)J^{-1}) = (S_n(E))^{-1}$ et comme la transposition, J et J^{-1} sont des isométries, on obtient que $\gamma_-(E) = \gamma_+(E) = \gamma(E)$. Celui-ci est de même strictement positif pour tout $E \in \mathbb{R}$ par le théorème de Fürstenberg. Toujours par le théorème d'Oseledets, une solution exponentiellement décroissante en $-\infty$, ne s'obtient que pour une condition initiale $v_{-\infty} \in V_-$. Ainsi, pour obtenir un vecteur propre dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, il faut avoir $\text{Vect}(v_{+\infty}) = \text{Vect}(v_{-\infty})$.

Il convient de faire attention au fait que ce que l'on vient d'affirmer dépend de E . Si E varie dans un ensemble non dénombrable (par exemple un intervalle de \mathbb{R}), l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels, pour tout E l'exposant de Lyapounov n'est pas strictement positif pourrait être de mesure non nulle et même de mesure 1. Par exemple, on ne peut pas affirmer que P-presque sûrement, pour tout $E \in \mathbb{R}$, toute solution de $h_\omega u = Eu$ est exponentiellement croissante ou décroissante. Cela nécessite une analyse plus poussée.

Par contre, nous verrons au chapitre 6 que cela implique déjà l'absence de spectre absolument continu presque sûr pour la famille $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$.

5.3 Suites de matrices aléatoires dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$

5.3.1 Puissances extérieures

Nous allons définir les puissances extérieures d'un espace vectoriel E de dimension finie. Pour fixer les choses et puisque nous serons de toutes façons dans ce cadre par la suite, nous allons considérer que cet espace vectoriel est \mathbb{R}^N pour N un entier fixé.

Définition 5.3.1. Pour $p \in \{1, \dots, N\}$, $\wedge^p \mathbb{R}^N$ est l'espace vectoriel des formes p -linéaires alternées sur le dual $(\mathbb{R}^N)^*$. L'espace vectoriel $\wedge^p \mathbb{R}^N$ est appelé puissance extérieure p -ième de l'espace \mathbb{R}^N .

Pour u_1, \dots, u_p dans \mathbb{R}^N et f_1, \dots, f_p dans $(\mathbb{R}^N)^*$, on pose :

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_p)(f_1, \dots, f_p) = \det((f_i(u_j))_{i,j})$$

Tout vecteur de la forme $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ sera appelé p -vecteur décomposable. A l'aide de ces vecteurs p -décomposables, on peut définir une base de l'espace $\wedge^p \mathbb{R}^N$ de la manière suivante.

Proposition 5.3.2. Soit $p \in \{1, \dots, N\}$. On a les propriétés suivantes :

1. Si (u_1, \dots, u_N) est une base de \mathbb{R}^N , alors $\{u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq N\}$ est une base de $\wedge^p \mathbb{R}^N$.
2. Pour u_1, \dots, u_p dans \mathbb{R}^N , $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ est non nul si et seulement si les vecteurs u_1, \dots, u_p sont indépendants.
3. (u_1, \dots, u_p) et (v_1, \dots, v_p) engendrent le même sous-espace si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que :

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_p = \lambda(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)$$

Cette proposition justifiera que les opérations que nous allons définir sur $\wedge^p \mathbb{R}^N$ le seront simplement sur l'ensemble des p -vecteurs décomposables.

Nous aurons à étudier dans la suite le comportement asymptotique des normes de suites de matrices dont on voudra prendre la p -ième puissance extérieure. Pour l'instant nous n'avons ni

défini ce qu'est la puissance extérieure d'une matrice, ni la norme sur une puissance extérieure d'espace vectoriel.

Tout d'abord, nous allons définir un produit scalaire sur $\wedge^p \mathbb{R}^N$. Pour deux p -uplets (u_1, \dots, u_p) et (v_1, \dots, v_p) de vecteurs de \mathbb{R}^N on définit le produit scalaire sur les p -vecteurs décomposables par :

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \det((\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N . On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

Il nous reste donc à définir comment un élément du groupe linéaire $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ agit sur $\wedge^p \mathbb{R}^N$. Si $M \in \text{GL}_N(\mathbb{R})$ on définit un automorphisme $\wedge^p M$ de $\wedge^p \mathbb{R}^N$ en le définissant sur les p -vecteurs décomposables par :

$$(\wedge^p M)(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = Mu_1 \wedge \dots \wedge Mu_p$$

On a alors la propriété de multiplicativité : $\wedge^p(MN) = (\wedge^p M)(\wedge^p N)$.

Puis, la norme de l'application linéaire ou de la matrice $\wedge^p M$ est la norme induite par $\| \cdot \|$ sur $\wedge^p \mathbb{R}^N$:

$$\| \wedge^p M \| = \sup \{ \| (\wedge^p M)v \| \mid v \in \wedge^p \mathbb{R}^N, \| v \| = 1 \}$$

On la note aussi $\| \cdot \|$ dans la mesure où dans la suite de notre propos il n'y aura pas, à l'usage, de confusion possible entre la norme sur $\wedge^p \mathbb{R}^N$ et la norme d'opérateur qu'elle induit. Par la propriété de multiplicativité de la puissance extérieure et la sous-multiplicativité de la norme d'opérateur, on a pour M et N dans $\text{GL}_N(\mathbb{R})$:

$$\| \wedge^p(MN) \| \leq \| \wedge^p M \| \| \wedge^p N \|$$

On remarque que si K est une matrice orthogonale pour le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N , alors $\wedge^p K$ est encore orthogonale. Cette remarque nous conduit à la proposition suivante :

Proposition 5.3.3. Soient M une matrice dans $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ et $a_1(M) \geq \dots \geq a_N(M) > 0$ les racines carrées positives des valeurs propres de tMM . Alors pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, on a :

$$\| \wedge^p M \| = a_1(M) \dots a_p(M)$$

Démonstration : On écrit une décomposition polaire de M , $M = KAU$ avec K et U des matrices orthogonales et $A = \text{diag}(a_1(M), \dots, a_N(M))$. Comme $\wedge^p K$ et $\wedge^p U$ sont encore orthogonales, on a : $\| \wedge^p M \| = \| \wedge^p A \|$.

Or si (e_1, \dots, e_N) est la base canonique de \mathbb{R}^N :

$$(\wedge^p A)(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = (a_{i_1} \dots a_{i_p})(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$$

D'où :

$$\| (\wedge^p A) \| = \sup \{ a_{i_1} \dots a_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq N \} = a_1(M) \dots a_p(M)$$

Ce qui achève la preuve. □

Enfin, on peut aussi estimer le logarithme de la norme de $\wedge^p M$.

Proposition 5.3.4. Soit M une matrice dans $GL_N(\mathbb{R})$. On pose :

$$\ell(M) = \max(\log^+ \|M\|, \log^+ \|M^{-1}\|)$$

Alors pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, et pour tout vecteur unitaire w de $\wedge^p \mathbb{R}^N$, on a :

$$|\log(\|\wedge^p M\|)| \leq p\ell(M) \text{ et } |\log(\|(\wedge^p M)w\|)| \leq p\ell(M)$$

Démonstration : Cela se déduit de la proposition précédente comme expliqué dans [1], Lemma 5.4, page 62. □

5.3.2 Théorème de Fürstenberg pour $GL_N(\mathbb{R})$

Notons tout d'abord que le théorème de Fürstenberg s'étend directement à au cas de suites de matrices aléatoires dans $GL_N(\mathbb{R})$. Il donne alors la stricte positivité de l'exposant de Lyapunov dominant.

L'exposant de Lyapunov dominant décrit le comportement exponentiel asymptotique de la suite $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'espace \mathbb{R}^N tout entier, en somme, le comportement asymptotique global de cette suite. Mais à lui seul, cet exposant ne permet pas de connaître le comportement asymptotique exponentiel sur les sous-espaces propres de la matrice $A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega$ et donc de comprendre réellement la dynamique associée à cette suite de matrices aléatoires. Pour pallier cette difficulté, on définit d'autres exposants de Lyapounov, intermédiaires, qui permettent d'affiner l'étude du comportement asymptotique de $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$. L'interprétation dynamique précise de ces exposants de Lyapounov est donnée par le théorème d'Oseledets.

Définition 5.3.5. Soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de matrices aléatoires, i.i.d. dans $GL_N(\mathbb{R})$ et telle que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ \|A_0^\omega\|)$ soit finie. Les exposants de Lyapounov $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ associés à la suite $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ sont définis de façon inductive par $\gamma_1 = \gamma$ (l'exposant de Lyapounov dominant) et pour $p \geq 2$,

$$\sum_{i=1}^p \gamma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|\wedge^p (A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)\|)$$

On peut voir que les sommes $\sum_{i=1}^p \gamma_i$ sont en fait les exposants de Lyapounov dominants associés aux suites $(\wedge^p (A_n^\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ lorsque p varie. Ainsi, les limites existent et ces sommes appartiennent à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si de plus $\mathbb{E}(\log^+ \|(A_0^\omega)^{-1}\|) < +\infty$ (ce qui sera vérifié automatiquement dans le cas symplectique), alors la proposition 5.3.4 s'applique et pour tout p :

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \gamma_i \right| \leq \max(\mathbb{E}(\log^+ \|A_0^\omega\|), \mathbb{E}(\log^+ \|(A_0^\omega)^{-1}\|)) < +\infty$$

Par suite, le cas où l'une des sommes vaudrait $-\infty$ étant exclu, tous les exposants de Lyapounov sont finis.

On peut donner une caractérisation de ces exposants de Lyapounov en fonction de la suite des valeurs propres des matrices ${}^t(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)$.

Proposition 5.3.6. Si $a_1(n) \geq \dots \geq a_N(n) > 0$ sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique définie positive ${}^t(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)$, alors, P-presque sûrement,

$$\forall p \in \{1, \dots, n\}, \gamma_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log a_p(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log a_p(n)$$

Démonstration : On renvoie à [1], proposition 5.6, page 63.

□

En particulier, cette proposition justifie la numérotation des exposants de Lyapunov et le vocable d'exposant de Lyapounov dominant puisqu'elle implique que $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_N$. Nous pouvons maintenant donner une interprétation géométrique de ces exposants de Lyapounov intermédiaires.

Théorème 5.3.7 (Oseledets). *Soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de matrices aléatoires, i.i.d. dans $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ et telle que l'espérance $\mathbb{E}(\log^+ \|A_0^\omega\|)$ soit finie. Soient $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_N$ ses exposants de Lyapounov. Notons r le nombre d'exposants de Lyapounov distincts de valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.*

Il existe une suite décroissantes de sous-espaces mesurables de \mathbb{R}^N , $(\mathcal{V}_i^\omega)_{1 \leq i \leq r+1}$ telle que

1. $\{0\} = \mathcal{V}_{r+1}^\omega \subset \mathcal{V}_r^\omega \subset \dots \subset \mathcal{V}_1^\omega \subset \mathbb{R}^N$.
2. $\forall i \in \{1, \dots, r\}, x \in \mathcal{V}_i^\omega \setminus \mathcal{V}_{i+1}^\omega \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(\|S_n x\|) = \lambda_i$.
3. $\dim(\mathcal{V}_i^\omega) - \dim(\mathcal{V}_{i+1}^\omega)$ est égal à la multiplicité de λ_i .

On souhaite à présent généraliser le théorème de Fürstenberg et obtenir des conditions pour que les exposants de Lyapunov soient deux à deux distincts. La forte irréductibilité se généralise ainsi :

Définition 5.3.8. *Soit $p \in \{1, \dots, N\}$. On dit qu'une partie S de $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ est p -fortement irréductible s'il n'existe pas de famille finie de sous-espaces stricts de $\wedge^p \mathbb{R}^N$, V_1, \dots, V_k telle que :*

$$(\wedge^p M)(V_1 \cup \dots \cup V_k) = V_1 \cup \dots \cup V_k$$

pour tout $M \in S$.

La condition de non-compacité du sous-groupe de Fürstenberg se généralise en la notion de p -contractivité. Avant cela, définissons la notion d'ensemble contractant.

L'indice d'un sous-ensemble T de $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ est le plus petit entier r tel qu'il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T telle que $(\|M_n\|^{-1} M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de rang r . Alors, une partie de $\text{GL}_N(\mathbb{R})$ est dite contractante lorsqu'elle est d'indice 1.

Rappelons qu'une mesure de probabilité P sur $P(\mathbb{R}^N)$ est dite propre lorsque pour tout hyperplan H dans \mathbb{R}^N , $P(\{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^N), x \in H \setminus \{0\}\}) = 0$.

Alors, si $T \subset \text{GL}_N(\mathbb{R})$ est un ensemble contractant, pour toute mesure de probabilité P propre sur $P(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de T telle que $M_n P$ converge faiblement vers une mesure de Dirac.

En effet, soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T telle que $(\|M_n\|^{-1} M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M de rang 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $Mx \neq 0$, on a $M_n \bar{x} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} M \bar{x}$. Mais, puisque P est propre et puisque $\{x \in \mathbb{R}^N, Mx = 0\}$ est un hyperplan, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n \bar{x} = M \bar{x} \quad \text{pour } P - \text{presque tout } \bar{x}.$$

Ainsi, si $\text{Im } M = \text{Vect}(z)$, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n \bar{x} = \bar{z} \quad \text{pour } P - \text{presque tout } \bar{x}.$$

Cela signifie que $M_n P$ converge faiblement vers $\delta_{\bar{z}}$.

Définition 5.3.9 (Ensemble p -contractant). Soient T une partie de $GL_N(\mathbb{R})$ et p un entier dans $\{1, \dots, N-1\}$. On dit que T est p -contractant s'il existe une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans T telle que la limite suivante existe :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\wedge^p M_n}{\|\wedge^p M_n\|} = M$$

et soit une matrice de rang 1.

On peut voir cette propriété comme l'analogie de la non-compactité dans le cas où $N = 2$. En effet, en supposant que toutes les matrices du groupe de Fürstenberg ont un déterminant de module 1 (hypothèse (i) du théorème de Fürstenberg), alors la non-compactité de G_μ est équivalente à son caractère contractant.

Supposons G_μ contractant. Alors soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans G_μ telle que $(\|M_n\|^{-1} M_n)$ converge vers une matrice M de rang 1. Alors,

$$0 = |\det(M)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\det(\|M_n\|^{-1} M_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n\|^{-2} |\det(M_n)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_n\|^{-2}. \quad (5.2)$$

En particulier, $\|M_n\|$ tend vers $+\infty$ et G_μ est non borné donc non compact.

Réciproquement, si G_μ est non contractant, comme c'est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$, il est forcément d'indice 2 puisqu'il ne peut être d'indice 0 ou 1. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G_μ . Alors la suite $(\|M_n\|^{-1} M_n)$ est une suite d'éléments de la sphère unité qui est compacte, on peut donc en extraire une sous-suite convergente, soit $(\|M_{n_m}\|^{-1} M_{n_m})$, vers une limite M . Comme G_μ est d'indice 2, M est de rang 2 donc elle est inversible. Alors par (5.2),

$$0 \neq |\det(M)| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|M_{n_m}\|^{-2}.$$

En particulier, $(\|M_{n_m}\|)_{m \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc il en est de même pour la suite $(M_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$. Donc, de toute suite de G_μ on peut extraire une sous-suite convergente, donc G_μ est compact.

La p -contractivité s'interprète encore comme le fait que la partie T est assez "grande" pour que l'on puisse y trouver une suite convergente vers une matrice de rang 1. Nous donnons maintenant un moyen simple de s'assurer qu'un sous-ensemble de $GL_N(\mathbb{R})$ est p -contractant pour tout p .

Proposition 5.3.10. Un sous-ensemble T de $GL_N(\mathbb{R})$ qui contient une matrice ayant N valeurs propres de modules distincts est p -contractant pour tout $p \in \{1, \dots, N-1\}$.

Démonstration. Soit M une matrice dans T ayant N valeurs propres de modules distincts, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$. Alors $\wedge^p M$ a une valeur propre simple dominante pour tout p dans $\{1, \dots, N-1\}$. En effet si u_1, \dots, u_N sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de M , alors :

$$\forall p, (\wedge^p M)(u_1 \wedge \dots \wedge u_N) = \lambda_1 \dots \lambda_N (u_1 \wedge \dots \wedge u_N)$$

Puis il vient, par la décomposition de Jordan de $\wedge^p M$ que $\frac{\wedge^p M^{2n}}{\|\wedge^p M^{2n}\|}$ converge vers une matrice de projection d'image $\ker(M - (\lambda_1 \dots \lambda_N)I)$ de dimension 1. Donc la suite $((\wedge^p M)^n)_n$ est p -contractante pour tout p dans $\{1, \dots, N-1\}$. \square

Bien sûr ce critère n'est pas un critère applicable en toute généralité pour prouver qu'un sous-ensemble de $GL_N(\mathbb{R})$ est p -contractant pour tout p , mais dans certains cas simples il peut suffire.

On peut maintenant énoncer un critère de séparation des exposants de Lyapunov dans $GL_N(\mathbb{R})$.

Théorème 5.3.11. Soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de matrices aléatoires inversible, d'ordre N et de loi commune μ et soit p un entier dans $\{1, \dots, N\}$. On suppose que le sous-groupe de Fürstenberg G_μ associé à la suite $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ est p -contractant et p -fortement irréductible et que l'espérance $\mathbb{E}(\log \|A_0^\omega\|)$ est finie. On a alors :

1. $\gamma_p > \gamma_{p+1}$
2. Pour tout élément non nul x de $\wedge^p \mathbb{R}^N$ et pour P -presque tout ω ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\wedge^p (A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)x\| = \sum_{i=1}^p \gamma_i$$

5.3.3 Théorème de Fürstenberg pour $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$

Dans les modèles qui nous intéressent, nous sommes amenés à étudier des suites de matrices de transfert qui sont naturellement dans le groupe symplectique du fait du caractère Hamiltonien du flot de ces modèles.

Définition 5.3.12. Le groupe des matrices symplectiques d'ordre $2N$ est le sous-groupe de $\text{GL}_{2N}(\mathbb{R})$ constitué des matrices M vérifiant :

$${}^t M J M = J$$

où J est la matrice d'ordre $2N$ définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. On le note $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$. Dans la définition de J , I est la matrice identité $N \times N$.

On peut alors donner des premières propriétés qui vont nous être utiles dans la suite.

Proposition 5.3.13. Si M est une matrice dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$.

1. ${}^t M$ est dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$.
2. Si λ est une valeur propre de M , alors $\frac{1}{\lambda}$ est aussi une valeur propre de M .
3. Il existe deux matrices orthogonales K et U dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_N, \frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_N})$ avec $a_1 \geq \dots \geq a_N \geq 1$ telles que : $M = KAU$.
4. $\|M\| = \|M^{-1}\|$.

Démonstration : Pour le point 1 on vérifie directement que si ${}^t M J M = J$ alors en passant à l'inverse, $M^{-1} J^{-1} ({}^t M)^{-1} = J^{-1}$. Or $J^{-1} = -J$ et donc $M^{-1} J ({}^t M)^{-1} = J$, d'où $J = M J {}^t M$ et ${}^t M$ est dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Pour le point 2, si λ est une valeur propre de M associée au vecteur propre v , alors :

$${}^t M J v = \frac{1}{\lambda} {}^t M J M v = \frac{1}{\lambda} J v$$

Ainsi $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de ${}^t M$ donc de M .

Pour le point 3, on renvoie à la preuve du lemme 3.1, page 88 dans [1], où l'on voit que les a_i ne sont autres que les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice symétrique définie positive ${}^t M M$.

Enfin, pour le point 4, c'est une conséquence immédiate du point 3 car alors $\|M\| = \|A\| = \|A^{-1}\| = \|M^{-1}\|$.

□

La définition des exposants de Lyapounov et le théorème d'Oseledets sont toujours valides dans le cadre des suites de matrices aléatoires *i.i.d.* dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. Nous avons même deux propriétés supplémentaires dans ce cadre. La première est que si $\mathbb{E}(\log^+ \|(A_0^\omega)\|) < +\infty$ alors par le point 4 de la proposition 5.3.13, on a aussi $\mathbb{E}(\log^+ \|(A_0^\omega)^{-1}\|) < +\infty$ et tous les exposants de Lyapounov sont finis. La seconde est une propriété de symétrie.

Proposition 5.3.14. *Si $\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{2N}$ sont les exposants de Lyapounov associés à une suite *i.i.d.* de matrices aléatoires dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$, alors, pour tout $1 \leq i \leq N$:*

$$\gamma_{2N-i+1} = -\gamma_i.$$

Démonstration : C'est une conséquence directe du point 3 de la proposition 5.3.13 appliqué à la matrice symplectique ${}^t(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)(A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)$, de la proposition 5.3.6 et du fait que $\log \frac{1}{a_i(n)} = -\log(a_i(n))$.

□

Cette propriété de symétrie nous dit que les exposants de Lyapounov associés à une suite *i.i.d.* de matrices aléatoires symplectiques peuvent se regrouper par paires et nous verrons qu'alors pour montrer la séparation de ceux-ci, il nous suffira d'étudier les N premiers.

Définition 5.3.15. *On dit que les exposants de Lyapounov sont séparés lorsqu'ils sont distincts :*

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{2N}$$

Nous voulons à présent obtenir un critère de séparation des exposants de Lyapounov analogue à celui obtenu dans $\mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$. Malheureusement, l'action de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ sur $\wedge^2 \mathbb{R}^{2N}$ n'est pas irréductible (donc *a fortiori* pas p -fortement irréductible). En effet, l'espace engendré par $\sum_{i=1}^N e_i \wedge e_{N+i}$ est invariant par tout élément de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. La notion de p -irréductibilité n'est donc pas adaptée au cadre symplectique. Nous allons donc raffiner cette définition pour l'adapter à nos besoins.

Nous introduisons la sous-variété p -lagrangienne de \mathbb{R}^{2N} . Soit (e_1, \dots, e_{2N}) la base canonique de \mathbb{R}^{2N} .

Définition 5.3.16. *Pour tout p dans $\{1, \dots, N\}$, soit L_p le sous-espace de $\wedge^p \mathbb{R}^{2N}$ engendré par $\{Me_1 \wedge \dots \wedge Me_p \mid M \in \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})\}$. On l'appelle la sous-variété p -lagrangienne de \mathbb{R}^{2N} .*

L'espace projectif $P(L_p)$ est l'ensemble des sous-espaces isotropes de dimension p dans \mathbb{R}^{2N} pour la forme bilinéaire donnée par le produit scalaire usuel.

Définition 5.3.17 (L_p -irréductibilité forte). *Soient T une partie de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ et p un entier dans $\{1, \dots, N\}$. On dit que T est L_p -fortement irréductible s'il n'existe pas d'union finie W de sous-espaces stricts de L_p telle que $\wedge^p M(W) = W$ pour tout $M \in T$.*

Là encore, par sous-espace strict, on entend sous-espace de L_p différent de L_p et de $\{0\}$. Le fait de se restreindre à des sous-espaces stricts de L_p permet d'éviter l'écueil sur lequel butait la première définition. Mais cette définition est moins intuitive du point de vue géométrique que la précédente, c'est pourquoi nous ne l'avons pas donnée directement.

On peut alors énoncer le théorème nous donnant le principal critère de séparation des exposants de Lyapounov.

Théorème 5.3.18. Soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de matrices aléatoires symplectiques d'ordre $2N$, de loi commune μ et soit p un entier dans $\{1, \dots, N\}$. On suppose que le sous-groupe de Fürstenberg G_μ associé à la suite $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}}$ est p -contractant et L_p -fortement irréductible et que l'espérance $\mathbb{E}(\log \|A_0^\omega\|)$ est finie. On a alors :

1. $\gamma_p > \gamma_{p+1}$
2. Pour tout élément non nul x de L_p et pour \mathbb{P} -presque tout ω ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\wedge^p (A_{n-1}^\omega \dots A_0^\omega)x\| = \sum_{i=1}^p \gamma_i$$

Ce résultat va surtout nous intéresser sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 5.3.19. Soit $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite i.i.d. de matrices aléatoires symplectiques d'ordre $2N$, de loi commune μ . On suppose que le sous-groupe de Fürstenberg G_μ associé à la suite $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ est p -contractant et L_p -fortement irréductible pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$ et que l'espérance $\mathbb{E}(\log \|A_0^\omega\|)$ est finie.

Alors, les exposants de Lyapounov associés à la suite $(A_n^\omega)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont séparés, en particulier :

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_N > 0$$

Démonstration : Le fait que $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_N$ est l'application répétée du point 1 du théorème 5.3.18 ci-dessus, pour chaque p dans $\{1, \dots, N-1\}$. Alors, γ_N est strictement positif car d'après la proposition 5.3.14, $\gamma_N = -\gamma_{N+1}$ et d'après le théorème 5.3.18, $\gamma_N > \gamma_{N+1}$ et donc on ne peut pas avoir $\gamma_N = \gamma_{N+1} = 0$.

□

Nous constatons donc que le lien est fait entre d'une part une propriété dynamique associée à une suite i.i.d. de matrices aléatoires symplectiques, en l'occurrence la séparation de ses exposants de Lyapounov, et des propriétés plus géométriques d'un objet algébrique associé à cette suite, le sous-groupe de Fürstenberg. Cela constitue un critère très puissant en pratique, puisqu'il permet de ne pas avoir à étudier directement des limites de produits matriciels, mais plus simplement de se ramener à des produits finis de telles matrices dans le sous-groupe de Fürstenberg.

5.3.4 Critère de Gold'sheid-Margulis

Il se trouve que les propriétés de p -contractivité et de L_p -forte irréductibilité sont difficiles à manipuler pour les modèles qui nous intéressent. Nous allons donner dans cette section un critère algébrique puissant qui nous permettra de traiter nos modèles.

Nous commençons par rappeler la définition de la densité au sens de la topologie de Zariski dans un groupe de Lie linéaire (i.e. un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{R})$). Nous garderons en tête que nous souhaitons appliquer ces définitions et résultats au groupe symplectique $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Définissons tout d'abord la topologie de Zariski sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On identifie pour cela $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ à \mathbb{R}^{N^2} . Alors, pour S une partie quelconque de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_{N^2}]$, on pose :

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^{N^2} \mid \forall P \in S, P(x) = 0\}$$

Ainsi, $V(S)$ est constitué des zéros communs aux polynômes de S . On appelle ensemble algébrique affine défini par S l'ensemble $V(S)$. On peut alors prouver qu'une intersection quelconque d'ensembles algébriques affines en est encore un, ainsi que pour les réunions finies.

Ces ensembles algébriques affines sont donc les fermés d'une topologie sur \mathbb{R}^{N^2} que l'on appelle topologie de Zariski. La topologie de Zariski est celle pour laquelle les fermés sont les zéros communs de familles de polynômes.

Si on regarde la topologie de Zariski sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, cela revient à regarder des polynômes en les N^2 coefficients matriciels. La topologie de Zariski sur $GL_N(\mathbb{R})$ est la topologie induite par la topologie de Zariski que l'on vient de définir. Il en sera de même pour la topologie de Zariski sur tout sous-groupe de $GL_N(\mathbb{R})$, comme par exemple $Sp_N(\mathbb{R})$ ou le sous-groupe de Fürstenberg associé à une suite *i.i.d.* de matrices aléatoires.

On peut maintenant définir l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble de $GL_N(\mathbb{R})$.

Définition 5.3.20. *L'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble G de $GL_N(\mathbb{R})$ est le plus petit fermé de $GL_N(\mathbb{R})$ pour la topologie de Zariski qui contient G . On le note $Cl_Z(G)$. Un sous-ensemble $G' \subset G$ est alors Zariski-dense dans G lorsque $Cl_Z(G') = Cl_Z(G)$.*

En d'autres termes, si G est un sous-ensemble de $GL_N(\mathbb{R})$, $Cl_Z(G)$ est l'ensemble des zéros dans $GL_N(\mathbb{R})$ des polynômes nuls sur G . Ainsi G' est Zariski-dense dans G si tout polynôme nul sur G' est aussi nul sur G .

L'exemple classique de sous-ensemble Zariski-dense dans un autre est \mathbb{Z} qui est Zariski-dense dans \mathbb{R} .

Nous donnons maintenant une propriété importante de l'adhérence de Zariski : elle préserve la structure de groupe.

Proposition 5.3.21. *Si G est un sous-groupe fermé de $GL_N(\mathbb{R})$, alors son adhérence de Zariski $Cl_Z(G)$ est encore un sous-groupe de $GL_N(\mathbb{R})$.*

Comme de plus l'adhérence de Zariski d'un sous-ensemble est aussi un fermé pour la topologie usuelle, on en déduit que l'adhérence de Zariski d'un sous-groupe de Lie de $GL_N(\mathbb{R})$ est encore un groupe de Lie. Cela sera essentiel pour pouvoir considérer l'algèbre de Lie de l'adhérence de Zariski du sous-groupe de Fürstenberg.

Nous disposons maintenant des définitions élémentaires nous permettant de présenter le critère de Gol'dsheid et Margulis.

Théorème 5.3.22 (Gol'dsheid et Margulis). *Soit G un sous-groupe de $Sp_N(\mathbb{R})$. Si G est Zariski-dense dans $Sp_N(\mathbb{R})$, alors G est p -contractant et L_p -fortement irréductible pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.*

Démonstration : D'après [5], lemme 6.2 et théorème 6.3, page 57, il suffit de prouver que la composante connexe de l'identité de $Sp_N(\mathbb{R})$ est irréductible dans L_p et que $Sp_N(\mathbb{R})$ est p -contractant, et ce pour tout p . Pour la p -contractivité, d'après la proposition 5.3.10, il nous suffit de trouver un élément de $Sp_N(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres soient de modules

on choisit un élément $g_i \in X_i$. On considère alors l'union suivante de sous-espaces stricts de L_p :

$$\bigcup_{i=1}^k g_i V$$

Étant donné que X_0 est un sous-groupe normal de X , pour tout couple (i, j) il existe un $s \in \{1, \dots, k\}$ tel que $g_i a g_j = g_s c$ avec $a, c \in X_0$. Or, si $g \in X$ on a : $g = g_j a$ avec $a \in X_0$ pour un certain $j \in \{1, \dots, k\}$. Alors, si $x \in \bigcup_{i=1}^k g_i V$, $x = g_i v$ et $gx = gg_i v = g_j a g_i v = g_s c v$. Or $c v \in V$ car $c \in X_0$ et V est invariant par tout élément de X_0 . D'où :

$$gx \in g_s V \subset \bigcup_{i=1}^k g_i V$$

et cette union est invariante par tout élément de X et donc en particulier par tout élément de G , ce qui contredit la L_p -forte irréductibilité de G .

Réciproquement, supposons que X_0 est irréductible dans L_p et soit $\bigcup_{i=1}^k V_i$ une union finie de sous-espaces stricts de L_p qui soit invariante par tout élément de G . Comme l'invariance de cette union finie est une condition algébrique, cette union est aussi invariante par X . On rappelle alors que l'action des éléments de X sur tout sous-espace de L_p est continue. Alors, pour $g \in X_0$ dans un voisinage suffisamment petit de l'identité, $gV_i = V_i$. Il vient, par connexité, pour tout $g \in X_0$, $gV_i = V_i$. Cela contredit la L_p -irréductibilité de X_0 .

□

Lemme 5.3.24 ([5], théorème 6.3). *Soit $p \in \{1, \dots, N\}$. Soit H un sous-groupe de $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$, et soit $X = \text{Cl}_Z(H)$ son adhérence de Zariski. Supposons que X est L_p -fortement irréductible et p -contractante. Alors H est aussi p -contractant.*

Démonstration : On peut reprendre point par point la preuve du théorème 6.3 page 58 dans [5] en remplaçant \mathbb{R}^m par L_p .

□

Nous avons donc à notre disposition un critère puissant, effectif dans certains cas, permettant de prouver qu'un sous-groupe de $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ est L_p -fortement irréductible et p -contractant pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$. Ce critère suffit par exemple à étudier la cas d'opérateurs de Schrödinger discrets à valeurs matricielles comme nous allons le voir à la section suivante.

5.3.5 Application au modèle d'Anderson discret $1d$ à valeurs matricielles

Soit $N \geq 1$. On souhaite étudier l'opérateur

$$h_\omega^N : \begin{matrix} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L) \\ (u_n) & \mapsto & -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega^{(n)}} u_n \end{matrix}$$

où

$$V_{\omega^{(n)}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(n)} & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & \omega_N^{(n)} \end{pmatrix}$$

avec les $(\omega_1^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}, \dots, (\omega_N^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ qui sont des suites de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, de loi commune ν dont le support contient au moins 2 points (par exemple 0 et 1 si ce sont des variables de Bernoulli). On pose aussi $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)})$ de loi $\nu \otimes \dots \otimes \nu$.

Pour étudier les fonction propres généralisées de l'opérateur h_ω^N on résout l'équation

$$-(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega^{(n)}} u_n = E u_n$$

ce qui conduit à introduire les matrices de transfert

$$T_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} V_{\omega^{(n)}} - E & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices de transfert forment une suite de matrices *i.i.d.* dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ de loi commune μ_E et on peut donc considérer le sous-groupe de Fürstenberg associé,

$$G(E) = \overline{\langle \mathrm{supp} \mu_E \rangle}.$$

On a alors

$$G_{\{0,1\}}(E) = \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N \rangle} \subset \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \mathrm{supp} \nu^{\otimes N} \rangle}.$$

On veut donc montrer que le sous-groupe engendré par 2^N matrices, $G_{\{0,1\}}(E)$, est Zariski-dense dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. Notons $X(E)$ son adhérence de Zariski dans $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

On rappelle que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -t a \end{pmatrix}, a \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), b_1 \text{ et } b_2 \text{ symétriques} \right\}.$$

Pour $i, j \in \{1, \dots, N\}$, soit E_{ij} la matrice dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ avec un coefficient 1 à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne, et 0 ailleurs. On pose aussi

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, X_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{ij} = {}^t X_{ij}, Z_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}.$$

Soit δ_{ij} le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On remarque que la famille $\{X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}\}_{i,j=1..N}$ est une base de $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$. Par un calcul direct on obtient, pour tous $i, j, k, r \in \{1, \dots, N\}$,

- (i) $[Z_{ij}, X_{kr}] = \delta_{jk} X_{ir} + \delta_{jr} X_{ik}$
- (ii) $[Y_{kr}, Z_{ij}] = \delta_{ik} Y_{rj} + \delta_{ir} Y_{kj}$
- (iii) $[X_{ij}, Y_{kr}] = \frac{1}{4} (\delta_{jk} Z_{ir} + \delta_{jr} Z_{ik} + \delta_{ki} Z_{jr} + \delta_{ir} Z_{jk})$

où $[,]$ est le crochet de Lie habituel sur les algèbres de Lie des groupes de Lie linéaires. De ces relations on déduit que $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ engendrée par

$$\{X_{ij}, Y_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1\}.$$

En effet, soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie engendrée par cet ensemble. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Alors, $Z_{ii} = 2[X_{ii}, Y_{ii}] \in \mathfrak{g}$ et $Z_{i,i+1} = 2[X_{ii}, Y_{i,i+1}] \in \mathfrak{g}$. Ainsi, pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $|i - j| \leq 1$, $Z_{ij} \in \mathfrak{g}$. Il vient, $X_{i,i+2} = [Z_{i,i+1}, Y_{i+1,i+2}]$, $Y_{i,i+2} = [Y_{i,i+1}, Z_{i+1,i+2}] \in \mathfrak{g}$ et $Z_{i,i+2} = 2[X_{i,i+1}, Y_{i+1,i+2}] \in$

\mathfrak{g} . Alors, pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $|i - j| = 2$, $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} \in \mathfrak{g}$. Par récurrence, on procède de même pour les indices i, j tels que $|i - j| = 3$ et plus généralement pour tous les indices $i, j \in \{1, \dots, N\}$. On prouve ainsi que $\{X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}\}_{i,j=1..N}$ est inclus dans \mathfrak{g} d'où $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{g}$. Finalement, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$.

De là, pour démontrer le lemme 7.3.3, nous sommes ramenés à démontrer que, pour tout $E \in \mathbb{R}$, l'algèbre de Lie engendrée par $\{T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N\}$ contient toutes les matrices X_{ij} et Y_{ij} pour $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $|i - j| \leq 1$. Soit

$$\mathfrak{a}(E) = \text{Lie}\{T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N\}. \quad (5.3)$$

Pour démontrer que $\mathfrak{a}(E)$ contient toutes les matrices X_{ij} et Y_{ij} for $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $|i - j| \leq 1$, on procède par étapes successives. Fixons $E \in \mathbb{R}$.

Étape 1. On prouve que les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix}$$

où D est diagonale, sont dans $X(E)$.

On choisit T_1 et T_2 dans $G(E)$ associées aux deux réalisations V_1 et V_2 de $V_{\omega^{(0)}}$. $X(E)$ étant un groupe, il est stable par inversion et produits. On a donc :

$$B := T_1 T_2^{-1} = \begin{pmatrix} I & V_1 - V_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \in G(E)$$

et

$$C := T_1^{-1} T_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ V_2 - V_1 & I \end{pmatrix} \in G(E).$$

Fixons $i \in \{1, \dots, N\}$. On peut choisir V_1 et V_2 de sorte que

$$B = \begin{pmatrix} I & E_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} I & 0 \\ E_{ii} & I \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$B^n = \begin{pmatrix} I & 0 \\ nE_{ii} & I \end{pmatrix} \text{ et } C^n = \begin{pmatrix} I & nE_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Soit P un polynôme dans $\mathbb{R}[X_{1,1}, \dots, X_{2N,2N}]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(C^n) = 0$. On fixe $X_{j,j} = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, 2N\}$ et $X_{r,l} = 0$ pour $r \neq l$ excepté pour $X_{i,N+i}$ et on considère :

$$\tilde{P} : X_{i,N+i} \mapsto P \left(\begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 & | & 0 \\ - & X_{i,N+i} & - \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)$$

\tilde{P} est un polynôme en une variable avec une infinité de racines, les $n \in \mathbb{Z}$. Donc \tilde{P} est le polynôme nul et : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{P}(\alpha) = 0$. Cela signifie que P s'annule sur toutes les matrices $\begin{pmatrix} I & \alpha E_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix}$. De plus :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} I & \alpha E_{ii} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E).$$

Comme on a fixé un i arbitraire, on a pour i et j distincts :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} I & \alpha_1 E_{11} \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I & \alpha_N E_{NN} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \alpha_1 E_{11} + \dots + \alpha_N E_{NN} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$$

Cela implique que :

$$\begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$$

pour toutes les matrices diagonales D . L'autre partie de cette première étape se traite de manière identique en utilisant C au lieu de B .

Étape 2 : On écrit :

$$\begin{pmatrix} I & D_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in X(E)$$

En dérivant au point $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

On a aussi :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ D_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$$

et la somme :

$$\begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ D_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$$

pour toutes matrices diagonales D_1 et D_2 . En particulier,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

Mais, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \cos(t)I & \sin(t)I \\ -\sin(t)I & \cos(t)I \end{pmatrix} \in X(E).$$

Pour $t = \frac{\pi}{2}$ on obtient $J \in X(E)$.

Étape 3 : Comme nous sommes dans un groupe de Lie *linéaire*, si $z \in \mathfrak{a}(E)$ et $A \in X(E)$, alors $AzA^{-1} \in \mathfrak{a}(E)$.

Étape 4 : Si $z = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -ta \end{pmatrix}$ est dans $\mathfrak{a}(E)$, puisque $J \in X(E)$, en appliquant l'étape 3 :

$$JzJ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -ta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ta & -b_2 \\ -b_1 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$$

En particulier, si $\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$ alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$ (puisque si $z \in \mathfrak{a}(E)$, $-z \in \mathfrak{a}(E)$).

De même pour $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}$. On vient donc de montrer que pour notre construction, b_1 et b_2 jouent le même rôle.

Étape 5 : Puisque $A = \begin{pmatrix} V_{\omega^{(0)}} & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in X(E)$, $AJ^{-1} = \begin{pmatrix} I & V_{\omega^{(0)}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$.

Étape 6 : Si $z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$ et $A = \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$ alors :

$$\begin{aligned} z_1 &:= AzA^{-1} - z \\ &= \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -V \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Vb_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -V \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Vb_2 & -Vb_2V \\ 0 & -b_2V \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E) \end{aligned}$$

et :

$$z'_1 = A^{-1}zA - z = \begin{pmatrix} -Vb_2 & -Vb_2V \\ 0 & b_2V \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$$

Finalement :

$$\frac{1}{2}(z_1 + z'_1) = \begin{pmatrix} Vb_2 & 0 \\ 0 & -b_2V \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

Si on peut construire dans $\mathfrak{a}(E)$ une matrice avec un bloc hors de la diagonale, on peut placer ce bloc sur la diagonale.

Étape 7 : Montrons que l'on peut faire l'inverse, à savoir que l'on peut déplacer un bloc de la diagonale hors de celle-ci. Si $z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -ta \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$ et $A = \begin{pmatrix} I & V \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$ alors :

$$z_2 = \begin{pmatrix} 0 & V^ta + aV \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E) \text{ et } \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + tz_2 \in X(E)$$

pour tout réel t . En effet, $z_2 = z - AzA^{-1}$ et il suffit de prendre l'exponentielle de l'algèbre de Lie dans le groupe de Lie.

Étape 8 : On applique les étapes 2 et 6 avec $b_2 = D$ une matrice diagonale et $V = I$, pour obtenir :

$$z_1 = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

Étape 9 : On peut donc supposer que $D = E_{ii}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{pmatrix} E_{ii} & \\ 0 & -E_{ii} \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

De plus, par le point 1, si $D_{\omega^{(0)}}$ est la diagonale de $V_{\omega^{(0)}}$, alors $\begin{pmatrix} I & D_{\omega^{(0)}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$. De plus par 5, $\begin{pmatrix} I & V_{\omega^{(0)}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E)$ et :

$$\begin{pmatrix} I & V_{\omega^{(0)}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & D_{\omega^{(0)}} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & V_{\omega^{(0)}} - D_{\omega^{(0)}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \in X(E).$$

Or,

$$V_{\omega^{(0)}} - D_{\omega^{(0)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} := V_0.$$

Alors, si V_i est la matrice contenant uniquement la i -ième ligne et la i -ième colonne de V_0 , $V_i = E_{ii}V_0 + V_0E_{ii}$ (car son unique élément diagonal qui aurait un facteur 2 est nul...). Alors, pour ce V_i , par le point 7, on a $\begin{pmatrix} I & V_i \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$.

Étape 10. On rappelle que $X_{ij} = X_{ji}$ et $Y_{ij} = Y_{ji}$. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. En appliquant encore l'étape 7 avec $E_{i-1,i-1}$ ou $E_{i+1,i+1}$ et V_i on obtient que $Y_{i,i-1} + Y_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E)$. Pour $i = 1$, cela signifie que $Y_{1,2} \in \mathfrak{a}(E)$. Alors, $\frac{1}{2}Z_{1,2} = [X_{1,1}, Y_{1,2}] \in \mathfrak{a}(E)$ et $Z_{1,2} \in \mathfrak{a}(E)$. Mais on a aussi $2X_{1,2} = [Z_{1,2}, X_{2,2}] \in \mathfrak{a}(E)$ et $X_{1,2} \in \mathfrak{a}(E)$. Alors, pour $i = 2$, on a $Y_{2,1} + Y_{2,3} \in \mathfrak{a}(E)$. Mais on vient tout juste de montrer que $Y_{2,1} \in \mathfrak{a}(E)$, donc $Y_{2,3} \in \mathfrak{a}(E)$. Par récurrence, on montre que :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, Y_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E).$$

On a aussi, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$[X_{ii}, Y_{i,i+1}] = \frac{1}{2}Z_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E) \quad \text{et} \quad [Z_{i,i+1}, X_{i+1,i+1}] = 2X_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E).$$

Cela montre que toutes les matrices X_{ij} et Y_{ij} pour $i, j \in \{1, \dots, N\}$ et $|i - j| \leq 1$ sont dans $\mathfrak{a}(E)$. D'où, $\mathfrak{a}(E) = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$.

Cela nous permet donc de déduire que le groupe de Fürstenberg associé à l'opérateur h_ω^N est Zariski-dense dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$. On déduit de cela que les exposants de Lyapounov associés sont séparés et en particulier ils sont tous strictement positifs et ce pour toute énergie $E \in \mathbb{R}$.

En appliquant le théorème d'Oseledets, on en déduit que pour chaque énergie E fixée, et pour P-presque tout ω , on peut construire N solutions de $h_\omega^N u = Eu$ qui sont exponentiellement décroissante vers 0 en $+\infty$. On peut faire de même en $-\infty$ avec L solutions a priori distinctes des L obtenues en $+\infty$. En effet, dans ce cas les exposants de Lyapounov sont tous de multiplicité 1.

Comme dans le cas scalaire, cela conduit, en adaptant la théorie de Kotani au contexte des opérateurs de Schrödinger à valeurs matricielles, à l'absence de spectre absolument continu.

Chapitre 6

Théorie de Kotani

6.1 Valeurs propres généralisées et spectre

Dans cette section, nous allons énoncer dans les cas discrets et continus des résultats permettant de caractériser le spectre à l'aide de la notion de valeurs propres et de fonctions propres généralisées.

Tous les résultats seront énoncés pour des opérateurs de Schrödinger. Ce sont des résultats déterministes.

6.1.1 Cas discret

Nous allons commencer par énoncer les définitions et résultats voulus dans le cas d'un opérateur de Schrödinger discret agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

Rappelons qu'une fonction $u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomialement bornée lorsqu'il existe $C > 0$ et $p \geq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, |u(n)| \leq C(1 + \|n\|_\infty)^p.$$

Dans cette section $H = -\Delta_{\text{disc}} + V$ est un opérateur de Schrödinger discret de potentiel V quelconque.

Définition 6.1.1. *On dit que $E \in \mathbb{R}$ est une valeur propre généralisée de H s'il existe une fonction polynomialement bornée $u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $Hu = Eu$. Une telle fonction u est appelé fonction propre généralisée.*

Notons $\sigma_{p-g}(H)$ l'ensemble des valeurs propres généralisées de H .

Précisons qu'une fonction propre généralisée n'est pas nécessairement une fonction propre de H puisqu'elle n'est pas supposée dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

Enfin, on dit que deux boréliens A et B de \mathbb{R} sont égaux à un ensemble de mesure spectrale nulle près lorsque $\chi_{A \setminus B}(H) = \chi_{B \setminus A}(H) = 0$. Avec cette notion on peut énoncer le théorème de caractérisation du spectre par les valeurs propres généralisées.

Théorème 6.1.2. *Le spectre de H est égal à $\sigma_{p-g}(H)$ à un ensemble de mesure spectrale nulle près.*

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 6.1.3. *On a $\sigma_{p-g}(H) \subset \sigma(H)$. De plus,*

$$\sigma(H) = \overline{\sigma_{p-g}(H)}.$$

Soit B un borélien de \mathbb{R} et soit $\mu(B) = \chi_B(H)$ la mesure à valeur projecteurs associée à H . Alors, pour $\varphi, \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, on pose $\mu_{\varphi, \psi}(B) = (\varphi, \mu(B)\psi)$. En particulier, on pose, pour $m, n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\mu_{m,n}(B) = (\delta_m, \mu(B)\delta_n).$$

Soit alors $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ une famille de réels strictement positifs et tels que $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha_n = 1$. On définit alors la mesure borélienne positive,

$$\rho(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha_n \mu_{n,n}(B),$$

appelée une mesure spectrale à valeurs réelles de H . On a

$$\rho(B) = 0 \text{ si et seulement si } \mu(B) = 0.$$

En particulier, deux boréliens sont égaux à un ensemble de mesure spectrale nulle près si et seulement si $\rho(A \setminus B) = \rho(B \setminus A) = 0$. De plus, on a

$$\text{supp } \rho = \sigma(H)$$

et ce support ne dépend donc pas du choix de la famille $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$.

La première inclusion dans le théorème 6.1.2 s'énonce sous la forme suivante, connu aussi sous le nom de Lemme de Sch'nol.

Lemme 6.1.4 (Sch'nol). *Soit ρ une mesure spectrale à valeurs réelles pour $H = -\Delta_{\text{disc}} + V$. Alors, pour ρ -presque tout $E \in \mathbb{R}$, il existe une solution u polynomialement bornée de l'équation $Hu = Eu$.*

Démonstration : Soit B un borélien de \mathbb{R} . Par Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}^d, |\mu_{m,n}(B)| \leq |\mu_{m,m}(B)|^{\frac{1}{2}} |\mu_{n,n}(B)|^{\frac{1}{2}}.$$

Comme par construction de ρ , les $\mu_{n,n}$ sont absolument continues par rapport à ρ , il en est de même pour toutes les $\mu_{m,n}$. On peut donc appliquer le théorème de Radon-Nikodym pour obtenir l'existence de fonctions ρ -intégrables $F_{m,n}$ telles que

$$\mu_{m,n}(B) = \int_B F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda).$$

Comme $\mu_{n,n}$ est une mesure positive, les fonctions $F_{n,n}$ sont ρ -presque sûrement positives. De plus,

$$\rho(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha_n \mu_{n,n}(B) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha_n \int_B F_{n,n}(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_B \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha_n F_{n,n}(\lambda) d\rho(\lambda).$$

En particulier, ρ -presque sûrement, $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha_n F_{n,n}(\lambda) = 1$. On en déduit que ρ -presque sûrement, pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, $F_{n,n}(\lambda) \leq \frac{1}{\alpha_n}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \int_B F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda) \right| &= |\mu_{m,n}(B)| \\ &\leq (\mu_{m,m}(B))^{\frac{1}{2}} (\mu_{n,n}(B))^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_B F_{m,m}(\lambda) d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_B F_{n,n}(\lambda) d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \alpha_m^{-\frac{1}{2}} \alpha_n^{-\frac{1}{2}} \rho(B). \end{aligned}$$

D'où, ρ -presque sûrement,

$$|F_{m,n}| \leq \alpha_m^{-\frac{1}{2}} \alpha_n^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.1)$$

Or, par le calcul fonctionnel, pour toute fonction mesurable bornée f , on a

$$(\delta_m, f(H)\delta_n) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda).$$

En particulier, si g est bornée à support compact, on prend $f(\lambda) = \lambda g(\lambda)$ et on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \lambda g(\lambda) F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda) &= (\delta_m, Hg(H)\delta_n) \\ &= (H\delta_m, g(H)\delta_n) \\ &= \sum_{|p|=1} -(\delta_{m+p}, g(H)\delta_n) + V(m)(\delta_m, g(H)\delta_n) \\ &= \sum_{|p|=1} - \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) F_{m+p,n}(\lambda) d\rho(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \lambda g(\lambda) V(m) F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda g(\lambda) H^{(m)} F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda) \end{aligned}$$

où l'expression $H^{(m)} F_{m,n}(\lambda)$ désigne l'application de l'opérateur H à la suite $m \mapsto F_{m,n}(\lambda)$. Ainsi, pour toute fonction g bornée à support compact,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda g(\lambda) F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda g(\lambda) H^{(m)} F_{m,n}(\lambda) d\rho(\lambda).$$

Ainsi, pour ρ -presque tout $E \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ fixé, la suite de terme général $u_m = F_{m,n}(E)$ est une solution de $Hu = Eu$. De plus, cette suite $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}$ vérifie d'après (6.1),

$$\forall m \in \mathbb{Z}^d, |u_m| \leq C_0 \alpha_m^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour $\beta > d$ arbitraire, on choisit alors $\alpha_m = c(1 + |m|)^{-\beta}$ avec $c > 0$ la constante de renormalisation. Soit $\epsilon > 0$. Pour $\beta = d + 2\epsilon$ on obtient l'estimation

$$\exists C > 0, \forall m \in \mathbb{Z}^d, |u_m| \leq C(1 + |m|)^{\frac{d}{2} + \epsilon}.$$

Cela prouve que $(u_m)_{m \in \mathbb{Z}^d}$ est une solution polynomialement bornée de $Hu = Eu$ et cette suite est construite pour ρ -presque tout $E \in \mathbb{R}$. □

L'autre sens du théorème 6.1.2 est donné par :

Proposition 6.1.5. *Si l'équation $Hu = Eu$ admet une solution polynomialement bornée, alors $E \in \sigma(H)$.*

Démonstration : Pour $L \in \mathbb{N}$ on pose $\Lambda_L = \{m \in \mathbb{Z}^d \mid |m| \leq L\}$ le cube centré en 0 et de côté $2L + 1$. Si $S \subset \mathbb{Z}^d$ et $u \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, on note

$$\|u\|_S = \sum_{m \in S} |u_m|^2.$$

Etape 1. Montrons par l'absurde que si u est polynomialement bornée et non nulle et si $l \geq 1$, alors il existe une suite d'entiers $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini et telle que

$$\frac{\|u\|_{\Lambda_{L_n+l}}}{\|u\|_{\Lambda_{L_n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Dans le cas contraire, il existe $a > 1$ et $L_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $L \geq L_0$,

$$\|u\|_{\Lambda_{L+1}} \geq a\|u\|_{\Lambda_L}.$$

En itérant cette relation et en prenant $L = L_0$ au départ, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u\|_{\Lambda_{L_0+kl}} \geq a^k \|u\|_{\Lambda_{L_0}}.$$

Or, u est polynomialement bornée, donc on doit avoir l'existence de $C, C_1 > 0$ et de $p \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|u\|_{\Lambda_{L_0+kl}} \leq C_1(L_0 + lk)^p \leq Ck^p.$$

D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k \leq \tilde{C}k^p$ ce qui aboutit à une contradiction.

Etape 2. A présent, on se donne u une solution polynomialement bornée de $Hu = Eu$. On la tronque en posant

$$(u_L)_m = \begin{cases} u_m & \text{si } |m| \leq L \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons alors $v_L = \frac{1}{\|u_L\|} u_L$ et $S_L = \{m \in \mathbb{Z}^d \mid L-1 \leq |m| \leq L+1\}$. Soit $m \notin S_L$. Si $|m| > L+1$ alors dans l'expression de

$$((H-E)u_L)_m = - \sum_{|p|=1} (u_L)_{m+p} + (V_m - E)(u_L)_m$$

tous les termes sont nuls donc $((H-E)u_L)_m = 0$. Si $|m| < L-1$ alors dans cette même expression, $u_L = u$ et on a $((H-E)u_L)_m = ((H-E)u)_m = 0$. Ainsi,

$$\|(H-E)u_L\|^2 \leq \|u\|_{S_L}^2 = \sum_{m \in S_L} |u_m|^2 = \|u\|_{\Lambda_{L+1}}^2 - \|u\|_{\Lambda_{L-2}}^2.$$

Or, par l'étape 1, il existe une suite (L_n) qui tend vers l'infini et telle que

$$\frac{\|u\|_{\Lambda_{L_n+1}}}{\|u\|_{\Lambda_{L_n-2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Alors,

$$\|(H-E)v_{L_n}\|^2 \leq \frac{\|u\|_{\Lambda_{L_n+1}}^2 - \|u\|_{\Lambda_{L_n-2}}^2}{\|u\|_{\Lambda_{L_n-2}}^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, $(v_{L_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Weyl pour H et E , donc $E \in \sigma(H)$.

□

Démonstration : On prouve le corollaire. Tout d'abord, on $\sigma_{p-g}(H) \subset \sigma(H)$ par la Proposition 6.1.5. Comme le spectre est fermé, on obtient la première inclusion : $\overline{\sigma_{p-g}(H)} \subset \sigma(H)$.

Puis, par le théorème 6.1.2, on a $\rho(\mathbb{R} \setminus \sigma_{p-g}(H)) = 0$ d'où

$$(\mathbb{R} \setminus \overline{\sigma_{p-g}(H)}) \cap \sigma(H) = (\mathbb{R} \setminus \overline{\sigma_{p-g}(H)}) \cap \text{supp } \rho = \emptyset.$$

De là, $\sigma(H) \subset \overline{\sigma_{p-g}(H)}$.

□

6.1.2 Cas continu

Pour les démonstrations et des références plus poussées on renvoie pour cette section à [19]. On commence par définir la classe de fonctions dans laquelle sera choisi le potentiel.

Définition 6.1.6. Soit $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $V \in K_d$ lorsque

1. Si $d \geq 3$,

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq \alpha} |x-y|^{-(d-2)} |V(y)| dy = 0.$$

2. Si $d = 2$,

$$\limsup_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \int_{|x-y| \leq \alpha} \ln(|x-y|^{-1}) |V(y)| dy = 0.$$

3. Si $d = 1$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \int_{|x-y| \leq 1} |V(y)| dy < \infty.$$

De plus, on dit que $V \in K_d^{\text{loc}}$ lorsque $V \mathbf{1}_{B(0,R)} \in K_d$ pour tout $R > 0$.

Par ailleurs, on posera $V_- = \max(-V, 0)$ et $V_+ = \max(V, 0)$. On a alors le résultat suivant dû à Sch'nol et indépendamment à Simon. On rappelle qu'une fonction $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite polynomialement bornée lorsqu'il existe $C > 0$ et $p \geq 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, |u(x)| \leq C(1 + |x|)^p.$$

Théorème 6.1.7. Soit $H = -\Delta + V$ agissant sur $H^2(\mathbb{R}^d)$ avec $V_+ \in K_d^{\text{loc}}$ et $V_- \in K_d$. Soit $E \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe u polynomialement bornée solution de $Hu = Eu$. Alors $E \in \sigma(H)$.

De fait, on peut affaiblir la condition "polynomialement bornée" pour u en :

$$\forall A > 0, \exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, |u(x)| \leq Ce^{A|x|}.$$

Il n'est pas vrai en général que réciproquement si $E \in \sigma(H)$, alors $Hu = Eu$ possède une solution polynomialement bornée. Par contre, on a :

$$\sigma(H) = \overline{\{E \in \mathbb{R} | Hu = Eu \text{ a une solution polynomialement bornée}\}}$$

où la barre est l'adhérence pour la topologie usuelle de \mathbb{R} .

Plus précisément, on peut énoncer une version continue du lemme de Sch'nol comme donnée dans [19][Théorème C.5.4].

Théorème 6.1.8. Soit $V_+ \in K_d^{\text{loc}}$ et $V_- \in K_d$ et $H = -\Delta + V$. On fixe $\delta > \frac{d}{2}$. Alors il existe une mesure spectrale à valeur réelles ρ et une famille $\{\Delta_n\}_{n \geq 1}$ d'ensembles mesurables deux à deux disjoints dont l'union est égale au support de ρ et tels que si $E \in \Delta_n$, il existe n fonctions $u_1(\cdot, E), \dots, u_n(\cdot, E)$ vérifiant

1. $Hu_j = Eu_j$ au sens faible contre la mesure ρ ,
2. $\exists C > 0, |u_j(x, E)| \leq C(1 + x^2)^{\frac{\delta}{2}}$,
3. si E est fixé, les $u_1(\cdot, E), \dots, u_n(\cdot, E)$ sont linéairement indépendantes.

Démonstration : La principale difficulté est de construire dans ce cas la mesure ρ et de vérifier le premier point. Elle s'obtient comme une trace :

$$\rho(\Delta) = \text{Tr}((1 + x^2)^{-\frac{\delta}{2}} E(\Delta) (1 + x^2)^{-\frac{\delta}{2}})$$

□

On retrouve alors l'égalité énoncé plus haut en remarquant que si $E_0 \in \sigma(H)$, alors pour tout $\epsilon > 0$, $\rho(E_0 - \epsilon, E_0 + \epsilon) > 0$ et pour tout E arbitrairement proche de E_0 , $Hu = Eu$ admet une solution polynomialement bornée (on utilise ici la définition du support de ρ).

6.2 Théorème d'Ishii-Pastur

6.2.1 Opérateur de Schrödinger à valeurs scalaires

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et soit $T : \Omega \rightarrow \Omega$ une transformation inversible ergodique. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée. On pose :

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{Z}, V_n^\omega = f(T^n \omega).$$

On considère l'opérateur de Schrödinger aléatoire h_ω agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par :

$$(h_\omega u)_n = -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_n^\omega u_n.$$

On considère l'équation $h_\omega u = Eu$, $E \in \mathbb{R}$ et la suite de matrices de transfert associée, $(T_n^\omega(E))_{n \in \mathbb{Z}}$, donnée par

$$T_n^\omega(E) = \begin{pmatrix} V_n^\omega - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A cette suite $(T_n^\omega(E))_{n \in \mathbb{Z}}$ est associé l'exposant de Lyapunov $\gamma(E) \geq 0$. En effet, posons pour $n \in \mathbb{Z}$, $S_n(\omega, E) = T_n^\omega(E) \cdots T_1^\omega(E)$ si $n \geq 1$ et $S_{-n}(\omega, E) = (T_{-n+1}^\omega(E))^{-1} \cdots (T_0^\omega(E))^{-1}$ si $n \geq 1$. Alors les deux limites

$$\gamma_\pm(\omega, E) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log(\|S_n(\omega, E)\|)$$

existent pour P-presque tout $\omega \in \Omega$. De plus, puisque $S_{-n}(\omega, E) = (T_0^\omega(E) \cdots T_{-n+1}^\omega(E))^{-1}$, on a par le caractère *i.i.d.*,

$$\mathbb{E}(\log \|S_{-n}(\omega, E)\|) = \mathbb{E}((S_n(E))^{-1})$$

Or, si $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a ${}^t(JS_n(E)J^{-1}) = (S_n(E))^{-1}$ et comme la transposition, J et J^{-1} sont des isométries, on obtient que $\gamma_-(\omega, E) = \gamma_+(\omega, E) = \gamma(E)$, P-presque sûrement.

De plus, comme $\det(S_n(\omega, E)) = 1$, au moins l'une de ses valeurs propres est de module plus grand que 1 et donc la norme de toute ces matrices est plus grande que 1. Donc par passage au logarithme, $\gamma(E)$ est positif.

On pose alors

$$\mathcal{Z} = \{E \in \mathbb{R} \mid \gamma(E) = 0\}.$$

On rappelle aussi que si $S \subset \mathbb{R}$, l'adhérence essentielle de S est définie par :

$$\overline{S}^{\text{ess}} = \{E \in \mathbb{R} \mid \forall \epsilon > 0, \text{Leb}(S \cap (E - \epsilon, E + \epsilon)) > 0\}.$$

Théorème 6.2.1. Soit Σ_{ac} le spectre absolument continu presque-sûr de la famille ergodique $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$. Alors,

$$\Sigma_{\text{ac}} \subset \overline{\mathcal{Z}}^{\text{ess}}. \tag{6.2}$$

Démonstration : Nous démontrons cette inclusion par contraposée. Soit $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalle et supposons que $\gamma(E) > 0$ pour presque tout $E \in (a, b)$.

Soit $A_E = \{\omega \in \Omega \mid \gamma(\omega, E) = 0\}$. Alors pour Leb-presque tout $E \in (a, b)$, $P(A_E) = 0$. On pose alors

$$A = \{(\omega, E) \in \Omega \times (a, b) \mid \gamma_+(\omega, E) \neq \gamma_-(\omega, E) \text{ ou les limites n'existent pas ou } \gamma(\omega, E) = 0\}$$

et

$$A_\omega = \{E \in (a, b) \mid \gamma_+(\omega, E) \neq \gamma_-(\omega, E) \text{ ou les limites n'existent pas ou } \gamma(\omega, E) = 0\}.$$

Alors, par Fubini,

$$(P \otimes \text{Leb})(A) = (\text{Leb} \otimes P)(A) = \int_a^b P(A_E) dE = 0.$$

D'où, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, $\text{Leb}(A_\omega) = 0$. Ainsi, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, $\gamma(\omega, E) > 0$ pour tout $E \in (a, b)$ hors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Par ailleurs, on sait par le théorème 6.2.1 que

$$E_{\mathbb{R} \setminus \sigma_{p-g}(h_\omega)}(h_\omega) = 0.$$

De plus, comme $\text{Leb}(A_\omega) = 0$, par définition du spectre absolument continu, on a $E_{A_\omega}^{\text{ac}}(h_\omega) = 0$. Or, si $E \notin A_\omega$, par le théorème d'Oseledets, les seules solutions polynomialement bornées de $h_\omega u = Eu$ sont exponentiellement décroissantes à l'infini et sont donc des vecteurs propres dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Comme $\ell^2(\mathbb{Z})$ est un espace de Hilbert séparable, il ne peut y avoir qu'un nombre au plus dénombrable de tels vecteurs propres et on en déduit que

$$\text{Leb}(\sigma_{p-g}(h_\omega) \cap ((a, b) \setminus A_\omega)) = 0.$$

Il vient finalement, en utilisant dans la première égalité que $E_{\mathbb{R} \setminus \sigma_{p-g}(h_\omega)}(h_\omega) = 0$,

$$E_{(a,b)}^{\text{ac}}(h_\omega) = E_{(a,b) \cap \sigma_{p-g}(h_\omega)}^{\text{ac}}(h_\omega) = E_{(a,b) \cap A_\omega}^{\text{ac}}(h_\omega) + E_{(a,b) \cap \sigma_{p-g}(h_\omega) \cap A_\omega^c}^{\text{ac}}(h_\omega) = 0.$$

Ceci démontre bien l'inclusion voulue. □

Remarque 6.2.2. Cette démonstration n'utilise pas le fait que l'opérateur de Schrödinger est discret. En effet, moyennant le fait que le lemme de Sch'nol est aussi valable dans le cas continu, à condition de bien définir les matrices de transfert dans le cas continu (ce qui est aussi possible) cette démonstration s'adapte directement.

Corollaire 6.2.3. Soit $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, un intervalle. Si pour Lebesgue presque tout $E \in (a, b)$, $\gamma(E) > 0$, alors $\Sigma_{\text{ac}} \cap (a, b) = \emptyset$.

Exemple 6.2.4. On considère à nouveau l'opérateur de presque-Mathieu $H_\omega^{\alpha, \lambda}$ agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par :

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}), \forall n \in \mathbb{Z}, (H_\omega^{\alpha, \lambda} u)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + \lambda \cos(\omega + 2\pi n \alpha) u_n,$$

où α est irrationnel, λ réel et $\omega \in [0, 2\pi)$. Le potentiel est ici ergodique en considérant $\Omega = \mathbb{T}$ muni de la mesure de Haar. On va alors montrer que

$$\forall E \in \mathbb{R}, \gamma(E) \geq \log \left(\left| \frac{\lambda}{2} \right| \right). \quad (6.3)$$

Si $E \in \mathbb{R}$, on considère la suite de matrices de transfert

$$T_n^{(\omega)}(E) = \begin{pmatrix} \lambda \cos(\omega + 2\pi n\alpha) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons l'écrire sous une autre forme à l'aide relations trigonométriques. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $z_n = ze^{2i\pi n\alpha}$ et on considère la matrice

$$Z_n(z, E) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2}(z_n^2 + 1) - Ez_n & -z_n \\ z_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $z = e^{i\omega}$, $z_n = e^{2i\pi n\alpha + i\omega}$ et

$$\cos(\omega + 2\pi n\alpha) = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right) \Leftrightarrow 2z_n \cos(\omega + 2\pi n\alpha) = z_n^2 + 1.$$

Ainsi,

$$Z_n(e^{i\omega}, E) = \begin{pmatrix} \lambda z_n \cos(\omega + 2\pi n\alpha) - Ez_n & -z_n \\ z_n & 0 \end{pmatrix} = z_n T_n^{(\omega)}(E).$$

Alors,

$$\|Z_n(e^{i\omega}, E) \cdots Z_0(e^{i\omega}, E)\| = |z_n \cdots z_0| \|T_n^{(\omega)}(E) \cdots T_0^{(\omega)}(E)\| = 1 \cdot \|S_n(\omega, E)\|.$$

Si on pose

$$\gamma_n(E) = \mathbb{E}(\log \|S_n(\omega, E)\|) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|T_n^{(\omega)}(E) \cdots T_0^{(\omega)}(E)\|$$

alors, comme $f : z \mapsto \log \|Z_n(z, E) \cdots Z_0(z, E)\|$ est sous-harmonique (elle est semi-continue supérieurement et $f(z)$ est inférieure à la valeur moyenne de f sur tout cercle centré en z), on a

$$\gamma_n(E) \geq \log \|Z_n(0, E) \cdots Z_0(0, E)\| = \log \left(\left| \frac{\lambda}{2} \right| \right)^{n+1}$$

car

$$Z_n(0, E) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\gamma_n(E) \geq (n+1) \log \left(\left| \frac{\lambda}{2} \right| \right)$ et par passage à la limite après avoir divisé par $n+1$, on obtient

$$\gamma(E) \geq \log \left(\left| \frac{\lambda}{2} \right| \right).$$

On peut alors appliquer le corollaire du théorème d'Ishii-Pastur pour obtenir que pour presque tout $\omega \in [0, 2\pi)$, le spectre absolument continu de $H_\omega^{\alpha, \lambda}$ est vide pour $|\lambda| > 2$.

6.2.2 Opérateur de Schrödinger à valeurs matricielles

Soit $N \geq 1$. On considère des opérateurs de la forme

$$h_\omega^N : \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) & \rightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^N) \\ (u_n) & \mapsto & -(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega(n)} u_n \end{array}$$

où les $V_{\omega(n)}$ sont des matrices symétriques réelles *i.i.d.* sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Ainsi, la famille $\{h_\omega^N\}_{\omega \in \Omega}$ est ergodique.

Pour étudier les fonction propres généralisées de l'opérateur h_ω^N on résout l'équation

$$-(u_{n+1} + u_{n-1}) + V_{\omega^{(n)}}u_n = Eu_n$$

ce qui conduit à introduire les matrices de transfert

$$T_{\omega^{(n)}}(E) = \begin{pmatrix} V_{\omega^{(n)}} - E & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices de transfert forme une suite de matrices *i.i.d.* dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ de loi commune μ_E et on peut donc considérer le sous-groupe de Fürstenberg associé,

$$G(E) = \overline{\langle \text{supp } \mu_E \rangle}.$$

Les exposants de Lyapunov en $\pm\infty$ sont alors bien définis et ils sont égaux et indépendants de ω pour P-presque tout $\omega \in \Omega$.

Notation. Soit Ω_{Lyap} un sous-ensemble de Ω tel que :

1. $\mathbb{P}(\Omega_{\text{Lyap}}) = 1$,
2. pour tout $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$ les limites définissant les exposants de Lyapounov existent en $\pm\infty$ et pour chaque p elles sont égales en $+\infty$ et $-\infty$,
3. pour tout $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$, ces limites sont indépendantes de ω .

On démontre, dans ce cadre des opérateurs à valeurs matricielles, un analogue du théorème de Ishii et Pastur sur la caractérisation du spectre absolument continu par les zéros des exposants de Lyapounov.

Rappelons que pour $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$, l'opérateur h_ω^N a $2N$ exposants de Lyapounov qui peuvent être regroupés par paires de nombres réels opposés :

$$\gamma_1(E) \geq \dots \geq \gamma_N(E) \geq 0 \geq \gamma_{N+1}(E) = -\gamma_N(E) \geq \dots \geq \gamma_{2N}(E) = -\gamma_1(E).$$

Pour $j \in \{1, \dots, N\}$, on pose

$$Z_j = \{E \in \mathbb{R} \mid \exists l_1, \dots, l_{2j} \in \{1, \dots, 2N\}, \gamma_{l_1}(E) = \dots = \gamma_{l_{2j}}(E) = 0\}.$$

Proposition 6.2.5. Soit $j \in \{1, \dots, N\}$ et soit $E \in Z_j$ fixé. Soit $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$. Alors, tout sous-espace de

$$\{\varphi \in (\mathbb{C}^N)^{\mathbb{Z}} \mid h_\omega^N \varphi = E\varphi, \varphi \notin \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N \text{ et } \varphi \text{ est polynomialement bornée}\}$$

est de dimension au plus $2j$.

Démonstration : On pose

$$V_{\text{sol}}(E) = \{\varphi \in (\mathbb{C}^N)^{\mathbb{Z}} \mid h_\omega^N \varphi = E\varphi\},$$

$$V_P(E) = \{\varphi \in V_{\text{sol}}(E) \mid \varphi \text{ est polynomialement bornée}\},$$

et

$$V_{\ell^2}(E) = \{\varphi \in V_{\text{sol}}(z) \mid \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^N\}.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que

$$\dim V_P(E) \leq 2j + \dim V_{\ell^2}(E).$$

Pour $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $V_{\text{sol}}(E)$, on pose

$$W(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix},$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Alors, W est une forme bilinéaire antisymétrique sur $V_{\text{sol}}(E)$. De plus, puisque ψ est dans $V_{\text{sol}}(E)$, elle est déterminée de manière unique par $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ et puisque J est inversible, W est non-dégénérée. En effet, soit $\psi \in V_{\text{sol}}(E)$ telle que, pour toute $\varphi \in V_{\text{sol}}(E)$, $W(\varphi, \psi) = 0$. On applique cette égalité avec $2N$ suites φ distinctes, celles telles que les $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$ soient les $2N$ vecteurs de la base canonique de \mathbb{C}^{2N} . En écrivant ces $2N$ relations, on obtient un système de Cramer de solution unique $J \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 0$. Puisque J est inversible, on obtient $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = 0$ et puisque ψ est déterminée de manière unique par $\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$, on obtient $\psi = 0$.

Comme W est une forme bilinéaire antisymétrique non-dégénérée sur $V_{\text{sol}}(E)$, si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces de $V_{\text{sol}}(E)$ tels que

$$\forall \varphi \in V_1, \forall \psi \in V_2, W(\varphi, \psi) = 0, \quad (6.4)$$

alors

$$\dim V_1 + \dim V_2 \leq 2N. \quad (6.5)$$

En effet, V_1 et JV_2 sont orthogonaux pour W .

On pose :

$$D_{\pm} = \{\varphi \in V_{\text{sol}}(E) \mid \varphi \text{ décroît exponentiellement en } \pm \infty\}.$$

Puisque $E \in Z_j$, il y a exactement $2j$ parmi les $2N$ exposants de Lyapunov qui s'annulent en E . Par le théorème d'Oseledets,

$$\dim D_{\pm} = N - j.$$

On a aussi $D_+ \cap D_- \subset V_{\ell^2}(E)$, donc par la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim (D_+ + D_-) &= \dim D_+ + \dim D_- - \dim (D_+ \cap D_-) \\ &\geq 2N - 2j - \dim V_{\ell^2}(E) \end{aligned} \quad (6.6)$$

De plus, si on prend $\varphi \in V_{\text{P}}(E)$ et $\psi \in D_{\pm}$, alors, par domination

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.7)$$

Mais on peut par ailleurs montrer que la suite $\left(\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est constante lorsque l'on choisit φ et ψ dans $V_{\text{sol}}(E)$. En effet, $T_{\omega^{(n)}}(E) \in \text{Sp}_N(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_{n+2} \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_{n+2} \end{pmatrix} &= (T_{\omega^{(n)}}((E) \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}))^* J T_{\omega^{(n)}}((E) \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix}) \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}^* T_{\omega^{(n)}}((E))^* J T_{\omega^{(n)}}((E)) \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}^* J \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.8)$$

Donc, si $\varphi \in V_{\text{P}}(E)$ et $\psi \in D_+ + D_-$, $W(\varphi, \psi) = 0$ par linéarité à droite de W . Donc par (6.5),

$$\dim V_{\text{P}}(E) + \dim (D_+ + D_-) \leq 2N.$$

En combinant avec (6.6),

$$\dim V_P(E) \leq 2j + \dim V_{\ell^2}(E),$$

ce qui démontre la proposition. □

Soit P_{bdd} l'ensemble des nombres réels E tels que l'équation $h_\omega^N \varphi = E\varphi$ admette une solution non triviale et polynomialement bornée. On a alors un analogue à valeurs matricielles du lemme de Sch'nol.

Proposition 6.2.6. *Pour P -presque tout $\omega \in \Omega$,*

$$\sigma(h_\omega^N) = \overline{P_{\text{bdd}}} = \overline{\{E \in \mathbb{R} \mid \exists \varphi \in V_P(E) \setminus \{0\}\}}$$

et $E_{\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd}}}(h_\omega^N) = 0$, où $E_{\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd}}}(h_\omega^N)$ est le projecteur spectral sur $\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd}}$ associé à l'opérateur auto-adjoint h_ω^N .

A l'aide de cette proposition, on peut démontrer un analogue du théorème d'Ishii-Pastur pour les opérateurs à valeurs matricielles. Les idées de la preuve sont les mêmes que dans le cas scalaire.

Théorème 6.2.7. *Pour tout $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$, la multiplicité du spectre absolument continu de h_ω^N dans Z_j est au plus $2j$.*

Démonstration : Soit $\omega \in \Omega_{\text{Lyap}}$. Pour Δ un borélien de \mathbb{R} , on note $E_\Delta(h_\omega^N)$ le projecteur spectral sur Δ et $E_\Delta^{\text{ac}}(h_\omega^N)$ le projecteur spectral sur la partie absolument continue de $\sigma(h_\omega^N)$ dans Δ . Pour démontrer le théorème, on doit montrer que

$$\text{rg } E_{Z_j}^{\text{ac}}(h_\omega^N) \leq 2j.$$

D'après la proposition 6.2.6, $E_{\mathbb{R} \setminus P_{\text{bdd}}}(h_\omega^N) = 0$, donc

$$E_{Z_j}^{\text{ac}}(h_\omega^N) = E_{Z_j \cap P_{\text{bdd}}}^{\text{ac}}(h_\omega^N) = E_{Z_j \cap P_{\text{bdd}} \cap S}^{\text{ac}}(h_\omega^N) + E_{Z_j \cap P_{\text{bdd}} \cap S^c}^{\text{ac}}(h_\omega^N),$$

où $S = \{E \in \mathbb{R} \mid \exists \varphi \in V_P(E) \cap V_{\ell^2}(E), \varphi \neq 0\}$. Or, si $E \in S$, alors E est une valeur propre de h_ω^N . Puisqu'il y a seulement un nombre dénombrable de vecteurs propres dans ℓ^2 pour h_ω^N qui est auto-adjoint, la mesure de Lebesgue de S est zéro. Ainsi,

$$E_{Z_j \cap P_{\text{bdd}} \cap S}^{\text{ac}}(h_\omega^N) = 0 \quad \text{et} \quad E_{Z_j}^{\text{ac}}(h_\omega^N) = E_{Z_j \cap P_{\text{bdd}} \cap S^c}^{\text{ac}}(h_\omega^N). \quad (6.9)$$

Or, puisque $E \in Z_j$, on peut appliquer la proposition 6.2.5 pour obtenir directement que

$$\text{rg } E_{Z_j \cap P_{\text{bdd}} \cap S^c}^{\text{ac}}(h_\omega^N) \leq 2j$$

ce qui implique que

$$\text{rg } E_{Z_j \cap P_{\text{bdd}} \cap S^c}^{\text{ac}}(h_\omega^N) \leq 2j. \quad (6.10)$$

En combinant (6.9) et (6.10), on vient de démontrer que

$$\text{rg } E_{Z_j}^{\text{ac}}(h_\omega^N) \leq 2j,$$

ce qui termine la preuve. □

Le théorème 6.2.7 implique le corollaire suivant.

Corollaire 6.2.8. *Si pour Lebesgue-presque tout $E \in \mathbb{R}$, $\gamma_1(E) \geq \dots \geq \gamma_N(E) > 0$, alors $\Sigma_{\text{ac}} = \emptyset$.*

Démonstration : Si $E \in \mathbb{R}$ vérifie $\gamma_N(E) > 0$, alors aucun des exposants de Lyapunov ne s'annule en E , donc $E \in Z_0$. Par le théorème 6.2.7, $E_{Z_0}^{\text{ac}}(h_\omega^N) = 0$. Si Δ est un borélien de \mathbb{R} , puisque par hypothèse $\text{Leb}(\mathbb{R} \setminus Z_0) = 0$,

$$E_\Delta^{\text{ac}}(h_\omega^N) = E_{\Delta \cap Z_0}^{\text{ac}}(h_\omega^N) = 0, \text{ pour P-p.t } \omega \in \Omega.$$

D'où $\Sigma_{\text{ac}} = \emptyset$ par définition de Σ_{ac} .

□

6.2.3 Enoncé du théorème d'Ishii-Pastur-Kotani

Les résultats liant les zéros des exposants de Lyapunov et le spectre absolument continu sont en fait plus profonds que ceux déjà énoncés. On reprend les notations introduites précédemment.

Théorème 6.2.9. 1. *L'ensemble Z_j est le support essentiel du spectre absolument continu de multiplicité $2j$.*

2. *Il n'y a pas de spectre absolument continu de multiplicité impaire.*

3. *On a*

$$\Sigma_{\text{ac}} = \overline{Z_N}^{\text{ess}} = \overline{\{E \in \mathbb{R} \mid \gamma_1(E) = \dots = \gamma_{2N}(E) = 0\}}^{\text{ess}}.$$

On a enfin un résultat local.

Proposition 6.2.10. *Si Z_N contient un intervalle I , alors le spectre de h_ω^N est purement absolument continu dans I .*

Les démonstrations de ces résultats reposent sur les propriétés fines des fonctions M de Weyl-Titchmarsh et de la fonction w de Kotani (voir [11]). Elles permettent aussi de démontrer un résultat de caractérisation partielle des potentiels déterministes.

Soit \mathbb{C}_+ le demi-plan supérieur complexe $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et \mathbb{C}_- le demi-plan inférieur $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$.

Proposition 6.2.11. *Soit $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. On fixe $\omega \in \Omega$. Il existe alors une unique fonction $x \mapsto F_+(x, E)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ (respectivement $x \mapsto F_-(x, E)$) satisfaisant :*

$$-F_+'' + V_\omega F_+ = E F_+, F_+(0, E) = I, \text{ et } \int_0^\infty \|F_+(x, E)\|^2 dx < +\infty$$

respectivement :

$$-F_-'' + V_\omega F_- = E F_-, F_-(0, E) = I, \text{ et } \int_{-\infty}^0 \|F_-(x, E)\|^2 dx < +\infty.$$

Définition 6.2.12. *Pour $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ on définit les fonctions m , M_+ et M_- associées à $H_A(\omega)$ par :*

$$M_+(E) = \frac{d}{dx} F_+(x, E)|_{x=0} \text{ et } M_-(E) = -\frac{d}{dx} F_-(x, E)|_{x=0}.$$

La fonction M_+ caractérise le potentiel sur la demi-droite réelle positive.

Théorème 6.2.13. *M_+ caractérise $\{V(x)\}_{x \geq 0}$ au sens où si V_1 et V_2 sont deux potentiels bornés tels que $M_{+,1} = M_{+,-2}$ alors pour presque tout $x \geq 0$, $V_1(x) = V_2(x)$.*

Il y a un énoncé analogue dans le cas discret. Voir [11], Theorem 4.1 et Theorem 4.2. Pour connaître le potentiel sur la demi-droite réelle négative, on utilise le résultat suivant.

Proposition 6.2.14. *Pour presque tout $E \in Z_N$ et pour presque tout $\omega \in \Omega$,*

$$M_-(E + i0, \omega) = -M_+(E + i0, \omega)^*.$$

Là encore on renvoie à [11] pour la démonstration et pour l'énoncé analogue dans le cas discret. Cela permet enfin d'en déduire :

Théorème 6.2.15. *Si $\text{Leb}(Z_N) > 0$, alors V est déterministe.*

Démonstration : La connaissance de V sur $(-\infty, 0]$ implique celle de M_- . Le résultat précédent implique que l'on connaît alors M_+ sur Z_N . Comme $\text{Leb}(Z_N) > 0$, cela détermine M_+ sur tout \mathbb{C}_+ par prolongement analytique des fonctions de Herglotz. Or M_+ détermine V sur $[0, +\infty)$. Finalement la connaissance de V sur $(-\infty, 0]$ implique celle de V sur $[0, +\infty)$ ce qui signifie que V est déterministe.

□

Chapitre 7

Un modèle d'Anderson continu $1d$ à valeurs matricielles

7.1 Le modèle et son spectre presque-sûr

We discuss properties of a random family of matrix-valued one-dimensional Anderson-Bernoulli operators

$$H_l(\omega) = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + V + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^{(n)} \mathbf{1}_{[0,l]}(x - ln) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \omega_N^{(n)} \mathbf{1}_{[0,l]}(x - ln) \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

acting on $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$, where $N \geq 1$ is an integer, I_N is the identity matrix of order N and $l > 0$ is a real number. The matrix V is a real $N \times N$ symmetric matrix, the space of these matrices being denoted by $S_N(\mathbb{R})$. The constants c_1, \dots, c_N are non-zero real numbers.

For every $i \in \{1, \dots, N\}$, $(\omega_i^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of independent and identically distributed (i.i.d., for short) random variables on a complete probability space $(\tilde{\Omega}_i, \tilde{\mathcal{A}}_i, \tilde{P}_i)$, of common law ν_i such that $\{0, 1\} \subset \text{supp } \nu_i$ and $\text{supp } \nu_i$ is bounded. In particular, the $\omega_i^{(n)}$'s can be Bernoulli random variables. The family $\{H_l(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ is a family of random operators indexed by the product space

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) = \left(\bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\Omega}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\Omega}_N), \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{\mathcal{A}}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{A}}_N), \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} (\tilde{P}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{P}_N) \right).$$

We also set, for every $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \dots, \omega_N^{(n)})$, which is a random variable on $(\tilde{\Omega}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\Omega}_N, \tilde{\mathcal{A}}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathcal{A}}_N, \tilde{P}_1 \otimes \dots \otimes \tilde{P}_N)$ of law $\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N$. The expectation value with respect to P will be denoted by $\mathbb{E}(\cdot)$.

As a bounded perturbation of $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N$, the operator $H_l(\omega)$ is self-adjoint on the Sobolev space $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ and thus, for every $\omega \in \Omega$, the spectrum of $H_l(\omega)$, denoted by $\sigma(H_l(\omega))$, is included in \mathbb{R} . Moreover, because of the periodicity in law of the random potential of $H_l(\omega)$, the family $\{H_l(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$ is $l\mathbb{Z}$ -ergodic. Thus, there exists $\Sigma \subset \mathbb{R}$ such that, for P -almost every $\omega \in \Omega$, $\Sigma = \sigma(H_l(\omega))$. There also exist Σ_{pp} , Σ_{ac} and Σ_{sc} , subsets of \mathbb{R} , such that, for P -almost every $\omega \in \Omega$, $\Sigma_{pp} = \sigma_{pp}(H_l(\omega))$, $\Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(H_l(\omega))$ and $\Sigma_{sc} = \sigma_{sc}(H_l(\omega))$, respectively the pure point, absolutely continuous and singular continuous spectrum of $H_l(\omega)$.

We can give an explicit description of the almost-sure spectrum Σ of $\{H_l(\omega)\}_{\omega \in \Omega}$. For $\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \dots, \omega_N^{(0)}) \in \text{supp} (v_1 \otimes \dots \otimes v_N)$, we denote by $E_1^{\omega^{(0)}}, \dots, E_N^{\omega^{(0)}}$ the real eigenvalues of the real symmetric matrix $V + \text{diag}(c_1 \omega_1^{(0)}, \dots, c_N \omega_N^{(0)})$. Then, we have

$$\Sigma = [0, +\infty) + \bigcup_{\omega^{(0)} \in \text{supp} (v_1 \otimes \dots \otimes v_N)} \{E_1^{\omega^{(0)}}, \dots, E_N^{\omega^{(0)}}\}. \quad (7.2)$$

In particular, Σ does not depend on the parameter l . It is important that V is constant and, in the random part, that the single site potential is of the form $\mathbf{1}_{[0,l]}$ instead of a generic single site potential $v \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ supported on $[0, l]$.

If we want to consider the case of a generic single site potential v supported on $[0, l]$, we will face two problems. The first one is that, from our proof of the structure of Σ , we can not recover that Σ is independent of l , which may lead to an empty statement in the result of localization that we aim at proving. The second problem is that in this case, or if instead of V we choose a matrix-valued function $x \mapsto V(x)$ from \mathbb{R} to $S_N(\mathbb{R})$ which is not constant, the particular form of the transfer matrices will not be simple anymore. Indeed, our analysis rests on the fact that the transfer matrices are exponentials of matrices. If neither V nor the single site potential $\mathbf{1}_{[0,l]}$ are constant, the transfer matrices become time-ordered exponentials instead of exponentials of matrices. In this case, we can not compute anymore the logarithms of these time-ordered exponentials and all the algebraic approach fails.

7.1.1 Matrices de transfert

Let $E \in \mathbb{R}$. We want to understand the exponential asymptotic behaviour of a solution $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$ of the second order differential system

$$H_l(\omega)u = Eu. \quad (7.3)$$

For this, we transform (7.3) into an Hamiltonian differential system of order 1 and we introduce the transfer matrix $T_{\omega^{(n)}}(E)$ of $H_l(\omega)$ from ln to $l(n+1)$ which maps a solution (u, u') of the order 1 system at time ln to the solution at time $l(n+1)$. The transfer matrix $T_{\omega^{(n)}}(E)$ is therefore defined by the relation

$$\begin{pmatrix} u(l(n+1)) \\ u'(l(n+1)) \end{pmatrix} = T_{\omega^{(n)}}(E) \begin{pmatrix} u(ln) \\ u'(ln) \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

for all $n \in \mathbb{Z}$. Since $T_{\omega^{(n)}}(E)$ is the solution of an Hamiltonian differential system of order 1 at time 1, the transfer matrix $T_{\omega^{(n)}}(E)$ lies in the symplectic group $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$. The sequence $(T_{\omega^{(n)}}(E))_{n \in \mathbb{Z}}$ is also a sequence of *i.i.d.* symplectic matrices because of the *i.i.d.* character of the $\omega_i^{(n)}$'s for every i in $\{1, \dots, N\}$ and the non-overlapping of these random variables. By iterating the relation (7.4) we get the asymptotic behaviour of (u, u') .

Définition 7.1.1. For every $E \in \mathbb{R}$, the Fürstenberg group of $H_l(\omega)$ is defined by

$$G(E) = \overline{\langle \text{supp } \mu_E \rangle},$$

where μ_E is the common distribution of the $T_{\omega^{(n)}}(E)$ and the closure is taken for the usual topology in $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$.

As the $T_{\omega^{(n)}}(E)$ are *i.i.d.*, $\mu_E = (T_{\omega^{(0)}}(E))_* (v_1 \otimes \dots \otimes v_N)$ and we have the internal description of $G(E)$:

$$G(E) = \overline{\langle T_{\omega^{(0)}}(E) ; \omega^{(0)} \in \text{supp} (v_1 \otimes \dots \otimes v_N) \rangle} \text{ for all } E \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

As, for every $i \in \{1, \dots, N\}$, $\{0, 1\} \subset \text{supp } \nu_i$, we also have

$$\langle T_{\omega^{(0)}}(E) ; \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N \rangle \subset G(E). \quad (7.6)$$

We will denote by $G_{\{0,1\}}(E)$ the subgroup $\langle T_{\omega^{(0)}}(E) ; \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N \rangle$ of $G(E)$ with 2^N generators.

We will prove that, for almost every $V \in S_N(\mathbb{R})$ and for all $E \in \mathbb{R}$ except those in a finite set, $G_{\{0,1\}}(E)$ is dense in $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$. Actually, we will prove it for V_0 the multiplication operator by the tridiagonal matrix V_0 having a null diagonal and coefficients on the upper and lower diagonals all equal to 1. Then one can apply a genericity argument to obtain the desired results.

We finish this section by giving the explicit form of the transfer matrices $T_{\omega^{(n)}}(E)$. Let $V \in S_N(\mathbb{R})$, $E \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ and $\omega^{(n)} \in \text{supp } (\nu_1 \otimes \dots \otimes \nu_N)$. We set

$$M_{\omega^{(n)}}(E, V) = V + \text{diag}(c_1 \omega_1^{(n)}, \dots, c_N \omega_N^{(n)}) - EI_N. \quad (7.7)$$

Then, we set the matrix in the Lie algebra $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{2N}(\mathbb{R})$

$$X_{\omega^{(n)}}(E, V) = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ M_{\omega^{(n)}}(E, V) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

By solving the constant coefficients system (7.3) on $[ln, l(n+1)]$, we have

$$T_{\omega^{(n)}}(E) = \exp(lX_{\omega^{(n)}}(E, V)) \quad (7.9)$$

for every $l > 0$, every $n \in \mathbb{Z}$, every $V \in S_N(\mathbb{R})$ and every $E \in \mathbb{R}$.

Since the transfer matrices are exponentials of matrices, we cannot directly apply the approach of the matrix-valued discrete case. Indeed, the morphism property of the exponential fails in the non-commutative case. Thus, we need an other approach which is based upon a general result of Breuillard and Gelander.

7.2 Engendrer des sous-groupes denses dans un groupe de Lie

Prouver qu'un sous-groupe de $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ est Zariski-dense dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ reste un problème constructif qui peut se révéler assez difficile à mettre en œuvre. Déjà dans les travaux de Gol'dsheid et Margulis, la construction qui y est faite pour un opérateur de Schrödinger discret à valeurs matricielles est relativement ardue. Dans le cas d'opérateurs continus à valeurs matricielles, on se heurte au fait que les matrices de transfert sont plus compliquées que dans le cas discret et que la construction de [5] se révèle peu stable par perturbation. Pour étudier le modèle continu il faut donc trouver un moyen de prouver qu'un sous-groupe de $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ est Zariski-dense. Dans les travaux de Breuillard et Gelander on trouve un critère plus fort permettant de prouver qu'un sous-groupe de $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ est dense pour la topologie usuelle dans $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$. C'est ce critère et ses conséquences que nous présentons maintenant.

Nous présentons un critère permettant de ramener la question de savoir si un sous-groupe d'un groupe de Lie semi-simple G engendré par un nombre fini d'éléments est dense, à un problème de reconstruction de l'algèbre de Lie de G . Ce résultat est présenté dans [2] où sont explorées certaines de ses conséquences.

Dans les travaux de Breuillard et Gelander, le résultat que nous allons énoncer est donné dans le cadre des groupes topologiquement parfaits. Commençons donc par en donner une définition et par voir pourquoi le groupe symplectique réel $\text{Sp}_N(\mathbb{R})$ l'est.

Définition 7.2.1. *Un groupe de Lie connexe G est dit topologiquement parfait lorsque son groupe dérivé $[G, G]$ est dense dans G .*

Dans notre cadre d'étude, on rappelle que le groupe symplectique $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ est connexe et semi-simple. Or un groupe de Lie semi-simple connexe G vérifie toujours $[G, G] = G$, il est donc topologiquement parfait. On pourra donc appliquer le théorème suivant avec $G = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Théorème 7.2.2 (Breuillard et Gelfand). *Soit G un groupe de Lie connexe réel topologiquement parfait, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Il existe alors un voisinage de l'identité $\mathcal{O} \subset G$, sur lequel $\log = \exp^{-1}$ est un difféomorphisme bien défini et tel que $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}$ engendrent un sous-groupe dense dans G si et seulement si $\log(g_1), \dots, \log(g_m)$ engendrent \mathfrak{g} .*

Ce résultat nous dit que dans un certain voisinage de l'identité (qui par construction ne dépend que de G), une partie finie est topologiquement génératrice de G si et seulement si elle est algébriquement génératrice de \mathfrak{g} .

7.3 Séparation des exposants de Lyapunov

7.3.1 Notations

Before stating our main results, we need to introduce some more notations. Let \mathcal{O} be the neighborhood of I_{2N} in $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ given by Theorem 7.2.2 applied to $G = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

We set

$$d_{\log \mathcal{O}} = \max\{R > 0; B(0, R) \subset \log \mathcal{O}\}, \quad (7.10)$$

where $B(0, R)$ is the open ball, centered on 0 and of radius $R > 0$, for the metric induced on the Lie algebra $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ of $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ by the matrix norm induced by the euclidean norm on \mathbb{R}^{2N} .

For $\omega^{(0)} = (\omega_1^{(0)}, \dots, \omega_N^{(0)}) \in \{0, 1\}^N$, let

$$M_{\omega^{(0)}}(0, V) = V + \mathrm{diag}(c_1 \omega_1^{(0)}, \dots, c_N \omega_N^{(0)}).$$

As $M_{\omega^{(0)}}(0, V) \in \mathrm{S}_N(\mathbb{R})$, it has $\lambda_1^{\omega^{(0)}}, \dots, \lambda_N^{\omega^{(0)}}$ as real eigenvalues. We set,

$$\lambda_{\min} = \min_{\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N} \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{\omega^{(0)}}, \quad \lambda_{\max} = \max_{\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N} \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_i^{\omega^{(0)}} \quad (7.11)$$

and $\delta = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/2$. We also set

$$l_C := l_C(N, V) = \min \left(1, \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{\delta} \right) \quad (7.12)$$

and, for every $l \in (0, l_C)$,

$$I(N, V, l) = \left[\lambda_{\max} - \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{l}, \lambda_{\min} + \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{l} \right]. \quad (7.13)$$

We remark that, as l tends to 0^+ , $I(N, V, l)$ tends to the whole real line. We can now state our main result. For $E \in \mathbb{R}$, let $G(E)$ be the Fürstenberg group associated to $H_l(\omega)$ (see Definition 7.1.1).

7.3.2 Résultats

Proposition 7.3.1. *For almost every $V \in S_N(\mathbb{R})$, there exists a finite set $\mathcal{S}_V \subset \mathbb{R}$ such that, for every $l \in (0, l_C)$,*

$$G(E) = \mathrm{Sp}_N(\mathbb{R}) \text{ for all } E \in I(N, V, l) \setminus \mathcal{S}_V.$$

In particular, Proposition 7.3.1 will imply the separability of the Lyapunov exponents of $H_l(\omega)$ and the absence of absolutely continuous spectrum in $I(N, V, l)$, for $l \in (0, l_C)$.

Corollaire 7.3.2. *For almost every $V \in S_N(\mathbb{R})$, there exists a finite set $\mathcal{S}_V \subset \mathbb{R}$ such that, for every $l \in (0, l_C)$, the positive Lyapunov exponents $\gamma_1(E), \dots, \gamma_N(E)$ of $H_l(\omega)$ verify*

$$\gamma_1(E) > \dots > \gamma_N(E) > 0 \text{ for all } E \in I(N, V, l) \setminus \mathcal{S}_V. \quad (7.14)$$

Therefore, $H_l(\omega)$ has no absolutely continuous spectrum in $I(N, V, l)$, i.e., for every $l \in (0, l_C)$, $\Sigma_{\mathrm{ac}} \cap I(N, V, l) = \emptyset$.

The model 7.1 is a matrix-valued model with a continuous Laplacian acting on $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$. The model 7.1 is a continuous analog of the discrete model studied in [5] and presented before. The main difference between these discrete and continuous models is that, in the discrete case, one can have energies where some of the Lyapunov exponents may vanish or may not be distinct. From a technical point of view, the algebraic part of the analysis, where we reconstruct $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ from the transfer matrices, is more difficult in the continuous case than in the discrete one. It is mostly due to the form of the transfer matrices. In the discrete case, their form is simple enough to compute directly the Zariski closure of $G(E)$ (in particular, the transfer matrices multiply well together) and to prove that it is equal to $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$ by showing that the Lie algebra of the Zariski closure of $G(E)$ is equal to the Lie algebra $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ of $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$. In the continuous case, the transfer matrices are exponentials of matrices and difficulties arise when we try to multiply elements of $G(E)$. Indeed, the form of a matrix obtained after multiplication of two exponentials of matrices is not simply related to the form of the multiplied exponentials. To avoid this problem, the idea is to work only in the Lie algebra of $G(E)$. This approach is different from what was done in the discrete case where, to prove equality of Lie algebras, it was allowed to make computations both in the Zariski closure of $G(E)$ and in its Lie algebra. Here, by using a general result on Lie groups due to Breuillard and Gelander, one is brought to make computations only in the Lie algebra generated by the logarithms of the transfer matrices. To avoid problems of determination of logarithms we have to introduce the parameter l in the model 7.1. All those difficulties do not appear in the case $N = 1$. When $N = 1$, we have only to prove the positivity of one Lyapunov exponent and apply Fürstenberg's theorem directly. In this case, no Lie algebra argument is needed and there is no problem due to the determination of logarithms of matrices.

7.3.3 Un lemme algébrique

The theorem of Breuillard and Gelander gives us the outline of the proof of Proposition 7.3.1 :

1. We prove that, for every $\ell \in (0, \ell_C)$ and every $E \in I(\ell, N)$, $T_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathcal{O}$, for every $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N$.
2. For $\ell < \ell_C$, we compute $\log T_{\omega^{(0)}}(E)$.
3. We prove that $\mathrm{Lie}\{\log T_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N\} = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$, the Lie algebra of $\mathrm{Sp}_N(\mathbb{R})$.

Before proving Proposition 7.3.1, we prove the following algebraic lemma which will be used to prove point 3.

We assume here that $V = V_0$.

Lemme 7.3.3. *Let $N \geq 1$ and $E \in \mathbb{R}$. The Lie algebra generated by $\{X_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N\}$ is equal to $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$.*

Démonstration : First, we recall that :

$$\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & -{}^t a \end{pmatrix}, a \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), b_1 \text{ and } b_2 \text{ symmetric} \right\}.$$

For $i, j \in \{1, \dots, N\}$, let E_{ij} be the matrix in $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ with a 1 coefficient at the intersection of the i th row and the j th column, and 0 elsewhere. We also set

$$\forall i, j \in \{1, \dots, N\}, X_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} + E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_{ij} = {}^t X_{ij}, Z_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & -E_{ji} \end{pmatrix}.$$

We also denote by δ_{ij} the Kronecker's symbol :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

We remark that the set $\{X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}\}_{i,j=1..N}$ is a basis of $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$. By direct computation, we get the relations, for every $i, j, k, r \in \{1, \dots, N\}$,

$$[Z_{ij}, X_{kr}] = \delta_{jk} X_{ir} + \delta_{jr} X_{ik}$$

$$(ii) [Y_{kr}, Z_{ij}] = \delta_{ik} Y_{rj} + \delta_{ir} Y_{kj}$$

$$(iii) [X_{ij}, Y_{kr}] = \frac{1}{4} (\delta_{jk} Z_{ir} + \delta_{jr} Z_{ik} + \delta_{ki} Z_{jr} + \delta_{ir} Z_{jk})$$

where $[\ , \]$ is the usual bracket on Lie algebra of linear Lie groups. From these relations, we deduce that $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ is generated by

$$\{X_{ij}, Y_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1\}.$$

Indeed, let \mathfrak{g} be the Lie algebra generated by this set. Let $i \in \{1, \dots, N\}$. Then, $Z_{ii} = 2[X_{ii}, Y_{ii}] \in \mathfrak{g}$ and $Z_{i,i+1} = 2[X_{ii}, Y_{i,i+1}] \in \mathfrak{g}$. Thus, for every $i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1$, $Z_{ij} \in \mathfrak{g}$. Then we have, $X_{i,i+2} = [Z_{i,i+1}, Y_{i+1,i+2}]$, $Y_{i,i+2} = [Y_{i,i+1}, Z_{i+1,i+2}] \in \mathfrak{g}$ and $Z_{i,i+2} = 2[X_{i,i+1}, Y_{i+1,i+2}] \in \mathfrak{g}$. Thus, for every $i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| = 2$, $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} \in \mathfrak{g}$. By induction, we do the same for indices i, j such that $|i - j| = 3$ and more generally for all indices $i, j \in \{1, \dots, N\}$. Thus, we proved that $\{X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}\}_{i,j=1..N}$ is included in \mathfrak{g} and then $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{g}$. Finally, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$.

According to this, to prove Lemma 7.3.3, we only have to prove that, for every $E \in \mathbb{R}$, the Lie algebra generated by $\{X_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N\}$ contains all the matrices X_{ij} and Y_{ij} for $i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1$. Let

$$\mathfrak{a}(E) = \text{Lie}\{X_{\omega^{(0)}}(E) \mid \omega^{(0)} \in \{0,1\}^N\}. \quad (7.15)$$

To prove that $\mathfrak{a}(E)$ contains the matrices X_{ij} and Y_{ij} for $i, j \in \{1, \dots, N\}, |i - j| \leq 1$, we will proceed in several steps. We fix $E \in \mathbb{R}$.

Step 1. We prove that the matrices Z_{ii} for $i \in \{1, \dots, N\}$ are in $\mathfrak{a}(E)$. Let $\omega^{(0)}$ and $\tilde{\omega}^{(0)}$ in $\{0,1\}^N$. We have :

$$[X_{\omega^{(0)}}(E), X_{\tilde{\omega}^{(0)}}(E)] = X_{\omega^{(0)}}(E)X_{\tilde{\omega}^{(0)}}(E) - X_{\tilde{\omega}^{(0)}}(E)X_{\omega^{(0)}}(E)$$

$$= \text{diag}(c_1(\tilde{\omega}_1^{(0)} - \omega_1^{(0)}), \dots, c_N(\tilde{\omega}_N^{(0)} - \omega_N^{(0)}), c_1(\omega_1^{(0)} - \tilde{\omega}_1^{(0)}), \dots, c_N(\omega_N^{(0)} - \tilde{\omega}_N^{(0)})).$$

In particular, for $\omega^{(0)} = (0, \dots, 0)$ and $\tilde{\omega}^{(0)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, with a 1 at the i th place and 0 elsewhere, we get $Z_{ii} = [X_{\omega^{(0)}}(E), X_{\tilde{\omega}^{(0)}}(E)] \in \mathfrak{a}(E)$.

Step 2. With the same choice of $\omega^{(0)}$ and $\tilde{\omega}^{(0)}$, we get

$$X_{\tilde{\omega}^{(0)}}(E) - X_{\omega^{(0)}}(E) = Y_{ii}.$$

Thus, for every $i \in \{1, \dots, N\}$, $Y_{ii} \in \mathfrak{a}(E)$.

Step 3. We fix $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N$ and $i \in \{1, \dots, N\}$. We have :

$$\begin{aligned} [X_{\omega^{(0)}}(E), Z_{ii}] &= \begin{pmatrix} 0 & -2E_{ii} \\ M_{\omega^{(0)}}(0)E_{ii} + E_{ii}M_{\omega^{(0)}}(0) - 2EE_{ii} & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2X_{ii} + 2Y_{i,i-1} + 2Y_{i,i+1} + 2(\omega_i^{(0)} - E)Y_{ii} \end{aligned}$$

with the convention that Y_{ij} is zero if the index j is not in $\{1, \dots, N\}$. Thus, dividing by 2, one gets,

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, -X_{ii} + Y_{i,i-1} + Y_{i,i+1} + (\omega_i^{(0)} - E)Y_{ii} \in \mathfrak{a}(E). \quad (7.16)$$

Step 4. We prove that the matrix J is in $\mathfrak{a}(E)$. We fix $\omega^{(0)} = (0, \dots, 0)$. By summing (7.16) for $i \in \{1, \dots, N\}$, we stay in $\mathfrak{a}(E)$ and we have :

$$\sum_{i=1}^N (-X_{ii} + Y_{i,i-1} + Y_{i,i+1} - EY_{ii}) = \sum_{i=1}^N (-X_{ii}) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_{\omega^{(0)}}(E) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

We can subtract $X_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathfrak{a}(E)$ from this, to get :

$$\sum_{i=1}^N (-X_{ii}) + \begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2I_N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

Thus, $\begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$. But, by Step 2, all the Y_{ii} 's are in $\mathfrak{a}(E)$, so we also have :

$$\sum_{i=1}^N Y_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_N & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E).$$

By adding these two matrices, $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_N \\ I_N & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{a}(E)$.

Step 5. For every $i \in \{1, \dots, N\}$, $[J, Z_{ii}] = 2Y_{ii} + 2X_{ii} \in \mathfrak{a}(E)$. But $Y_{ii} \in \mathfrak{a}(E)$, so $2X_{ii} = [J, Z_{ii}] - 2Y_{ii} \in \mathfrak{a}(E)$ and, for every $i \in \{1, \dots, N\}$, $X_{ii} \in \mathfrak{a}(E)$.

Step 6. We recall that $X_{ij} = X_{ji}$ and $Y_{ij} = Y_{ji}$. Let $i \in \{1, \dots, N\}$. Subtracting $(\omega^{(0)} - E)Y_{ii} \in \mathfrak{a}(E)$ and adding $X_{ii} \in \mathfrak{a}(E)$ in (7.16) we get $Y_{i,i-1} + Y_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E)$. For $i = 1$, it means that $Y_{1,2} \in \mathfrak{a}(E)$. Then, $\frac{1}{2}Z_{1,2} = [X_{1,1}, Y_{1,2}] \in \mathfrak{a}(E)$ and $Z_{1,2} \in \mathfrak{a}(E)$. But we also have $2X_{1,2} = [Z_{1,2}, X_{2,2}] \in \mathfrak{a}(E)$ and $X_{1,2} \in \mathfrak{a}(E)$. Now, for $i = 2$, we have $Y_{2,1} + Y_{2,3} \in \mathfrak{a}(E)$. But we just proved that $Y_{2,1} \in \mathfrak{a}(E)$, thus $Y_{2,3} \in \mathfrak{a}(E)$. Inductively, we prove that :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, Y_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E).$$

Also, for every $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$[X_{ii}, Y_{i,i+1}] = \frac{1}{2}Z_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E) \quad \text{and} \quad [Z_{i,i+1}, X_{i+1,i+1}] = 2X_{i,i+1} \in \mathfrak{a}(E).$$

It proves that all the matrices X_{ij} and Y_{ij} for $i, j \in \{1, \dots, N\}$ and $|i - j| \leq 1$ are in $\mathfrak{a}(E)$. Thus, $\mathfrak{a}(E) = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$.

□

7.3.4 L'argument de généralité

We start by looking at the geometry of the set of k -tuples in $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ which does not generate $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$ in the sense of Lie algebras.

Lemme 7.3.4. *Let $k \in \mathbb{N}^*$ and*

$$\mathcal{V}_k = \left\{ (X_1, \dots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k ; (X_1, \dots, X_k) \text{ does not generate } \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \right\}. \quad (7.17)$$

Then, there exist $Q_{r_1}, \dots, Q_{r_k} \in \mathbb{R}[(\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k]$ such that

$$\mathcal{V}_k = \left\{ (X_1, \dots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k ; Q_{r_1}(X_1, \dots, X_k) = 0, \dots, Q_{r_k}(X_1, \dots, X_k) = 0 \right\}. \quad (7.18)$$

Thus, \mathcal{V}_k is the affine algebraic manifold of $\{Q_{r_1}, \dots, Q_{r_k}\}$ which will be denoted by $V(\{Q_{r_1}, \dots, Q_{r_k}\})$. We will also identify the ring of the polynomials over $(\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k$, $\mathbb{R}[(\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k]$, with the ring of polynomials in $k(2N^2 + N)$ variables, $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_{k(2N^2+N)}]$.

Démonstration : Let $(X_1, \dots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k$ and let $\text{Lie}\{X_1, \dots, X_k\}$ be the Lie algebra generated by X_1, \dots, X_k . If we denote by $\{Y_1, \dots, Y_l, \dots\}$ the countable set of all the successive brackets constructed from $\{X_1, \dots, X_k\}$, we have

$$\text{Lie}\{X_1, \dots, X_k\} = \text{span}(\{Y_1, \dots, Y_l, \dots\}), \quad (7.19)$$

the vector space spanned by $\{Y_1, \dots, Y_l, \dots\}$. Then we have

$$\text{Lie}\{X_1, \dots, X_k\} \neq \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \text{ if and only if } \text{rk}(\{Y_1, \dots, Y_l, \dots\}) < 2N^2 + N, \quad (7.20)$$

since $\dim \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) = 2N^2 + N$. At each $Y_l \in \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$, we associate $\tilde{Y}_l \in \mathbb{R}^{2N^2+N}$ whose coefficients are those which define the matrix Y_l . The coefficients of \tilde{Y}_l are polynomial in the $k(2N^2 + N)$ coefficients which define the matrices X_1, \dots, X_k . For $m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}$, we set

$$Q_m(X_1, \dots, X_k) = \det(\tilde{Y}_{m_1}, \dots, \tilde{Y}_{m_{2N^2+N}}) \in \mathbb{R}[(\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k]. \quad (7.21)$$

Then, $\text{rk}(\{Y_1, \dots, Y_l, \dots\}) < 2N^2 + N$ if and only if $Q_m(X_1, \dots, X_k) = 0$ for all $m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}$. Thus,

$$\mathcal{V}_k = \bigcap_{m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}} \left\{ (X_1, \dots, X_k) \in (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^k ; Q_m(X_1, \dots, X_k) = 0 \right\}. \quad (7.22)$$

With the definition of the affine algebraic manifold, we can rewrite (7.22) as

$$\mathcal{V}_k = V(\{Q_m ; m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}\}). \quad (7.23)$$

But, if $I(\{Q_m ; m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}\})$ denote the ideal generated by the family $\{Q_m ; m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}\}$, we have

$$V(\{Q_m ; m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}\}) = V(I(\{Q_m ; m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}\})). \quad (7.24)$$

Since the ring $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_{k(2N^2+N)}]$ is Noetherian, $I(\{Q_m ; m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}\})$ is of finite type, i.e. there exist $r_1, \dots, r_k \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}$ such that,

$$I(\{Q_m ; m \in (\mathbb{N}^*)^{2N^2+N}\}) = I(\{Q_{r_1}, \dots, Q_{r_k}\}). \quad (7.25)$$

Finally,

$$\mathcal{V}_k = V(I(\{Q_{r_1}, \dots, Q_{r_k}\})) = V(\{Q_{r_1}, \dots, Q_{r_k}\}). \quad (7.26)$$

□

For $E \in \mathbb{R}$ and $V \in S_N(\mathbb{R})$, we will reindex the family $\{X_{\omega^{(0)}}(E, V)\}_{\omega^{(0)} \in \{0,1\}^N}$ as $(X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V))$. Let $E \in \mathbb{R}$ be fixed and let

$$\mathcal{V}_{(E)} = \{V \in S_N(\mathbb{R}) ; (X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V)) \text{ does not generate } \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})\}. \quad (7.27)$$

Lemme 7.3.5. *We have, $\text{Leb}_{N(N+1)/2}(\mathcal{V}_{(E)}) = 0$.*

Démonstration : Let

$$\begin{aligned} f_E : S_N(\mathbb{R}) &\rightarrow (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^{2^N} \\ V &\mapsto (X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V)). \end{aligned} \quad (7.28)$$

Then f_E is a polynomial in the $N(N+1)/2$ coefficients which define V . Indeed, we can identify $S_N(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{N(N+1)/2}$ and $(\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^{2^N} \simeq \mathbb{R}^{2^N(2N^2+N)}$ and, after this identification, each of the $2^N(2N^2+N)$ components of f_E is a polynomial in $N(N+1)/2$ variables. We have $\mathcal{V}_{(E)} = f_E^{-1}(\mathcal{V}_{2^N})$. Then, by Lemma 7.3.4, $V \in \mathcal{V}_{(E)}$ if and only if

$$Q_{r_1}(X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V)) = 0, \dots, Q_{r_{2^N}}(X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V)) = 0,$$

which can be rewritten

$$V \in \mathcal{V}_{(E)} \text{ if and only if } (Q_{r_1} \circ f_E)(V) = 0, \dots, (Q_{r_{2^N}} \circ f_E)(V) = 0. \quad (7.29)$$

But, we have proven that, if V_0 is the tridiagonal matrix with zeros on the diagonal and all coefficients on its upper and lower diagonals equal to 1, then, for any $E \in \mathbb{R}$, V_0 is not in $\mathcal{V}_{(E)}$. Thus, there exists $i_0 \in \{r_1, \dots, r_{2^N}\}$ such that $(Q_{i_0} \circ f_E)(V_0) \neq 0$ and, since the function $Q_{i_0} \circ f_E$ is polynomial and does not vanish identically,

$$\text{Leb}_{N(N+1)/2}(\{V \in S_N(\mathbb{R}) ; (Q_{i_0} \circ f_E)(V) = 0\}) = 0 \quad (7.30)$$

and, by inclusion,

$$\text{Leb}_{N(N+1)/2}(\mathcal{V}_{(E)}) = 0. \quad (7.31)$$

□

Finally, we introduce the set

$$\mathcal{V} = \bigcap_{E \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_{(E)} \quad (7.32)$$

$$= \{V \in S_N(\mathbb{R}) ; (X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V)) \text{ does not generate } \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}), \text{ for all } E \in \mathbb{R}\}.$$

Then, by Lemma 7.3.5 and by inclusion, we have

$$\text{Leb}_{N(N+1)/2}(\mathcal{V}) = 0. \quad (7.33)$$

Now we can prove the last result of this section.

Lemme 7.3.6. *For any $V \in S_N(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{V}$, there exists a finite set $S_V \subset \mathbb{R}$ such that*

$$(X_1(E, V), \dots, X_{2^N}(E, V)) \text{ generates } \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \text{ for all } E \in \mathbb{R} \setminus S_V.$$

Démonstration : Let $V \in S_N(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{V}$. Then, there exists $E_0 \in \mathbb{R}$ such that the family $(X_1(E_0, V), \dots, X_{2N}(E_0, V))$ generates $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$. Thus, there exists $i_0 \in \{r_1, \dots, r_{2N}\}$ such that $(Q_{i_0} \circ f)(E_0, V) \neq 0$, where

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times S_N(\mathbb{R}) &\rightarrow (\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}))^{2N} \\ (E, V) &\mapsto (X_1(E, V), \dots, X_{2N}(E, V)). \end{aligned} \quad (7.34)$$

But, for V fixed, $E \mapsto (Q_{i_0} \circ f)(E, V)$ is polynomial and, as it is not identically vanishing, it has only a finite set \mathcal{S}_V of roots. Thus, we have

$$(Q_{i_0} \circ f)(E, V) \neq 0 \text{ for all } E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_V, \quad (7.35)$$

which is equivalent to the condition that

$$(X_1(E, V), \dots, X_{2N}(E, V)) \notin \mathcal{V}_{2N} \text{ for all } E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{S}_V. \quad (7.36)$$

□

7.3.5 Preuve de la proposition 7.3.1

We can now prove Proposition 7.3.1.

Démonstration : [of Proposition 7.3.1] We fix $V \in S_N(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{V}$. We start by constructing l_C and, for $l \in (0, l_C)$, the interval $I(N, V, l)$ as given in (7.12) and (7.13). Now, let $\lambda_1^{\omega(0)}, \dots, \lambda_N^{\omega(0)}$ be the real eigenvalues of $M_{\omega(0)}(0, V)$ (see (7.7)). Then, the eigenvalues of $X_{\omega(0)}(E, V)^t X_{\omega(0)}(E, V)$ are $1, (\lambda_1^{\omega(0)} - E)^2, \dots, (\lambda_N^{\omega(0)} - E)^2$. Thus we have

$$\|X_{\omega(0)}(E, V)\| = \max \left(1, \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i^{\omega(0)} - E| \right), \quad (7.37)$$

where $\|\cdot\|$ is the matrix norm associated to the euclidian norm on \mathbb{R}^{2N} .

Let \mathcal{O} be the neighborhood of the identity given by Theorem 7.2.2 applied to the group $G = \text{Sp}_N(\mathbb{R})$. Then, for $d_{\log \mathcal{O}}$ as defined in (7.10), we take $l \leq d_{\log \mathcal{O}}$ and we set $r_l = (1/l) d_{\log \mathcal{O}} \geq 1$. If we set

$$I(N, V, l) = \left\{ E \in \mathbb{R} ; \max \left(1, \max_{\omega(0) \in \{0,1\}^N} \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i^{\omega(0)} - E| \right) \leq r_l \right\}, \quad (7.38)$$

then, since $r_l \geq 1$, we have

$$I(N, V, l) = \bigcap_{\omega(0) \in \{0,1\}^N} \bigcap_{1 \leq i \leq N} [\lambda_i^{\omega(0)} - r_l, \lambda_i^{\omega(0)} + r_l]. \quad (7.39)$$

Let $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ and δ be as in (7.11). If $\delta < r_l$ then $I(N, V, l) \neq \emptyset$ and we have

$$I(N, V, l) = [\lambda_{\max} - r_l, \lambda_{\min} + r_l], \quad (7.40)$$

which is the definition we took in (7.13). This interval is centered in $(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})/2$ and is of length $2r_l - 2\delta > 0$, which tends to $+\infty$ when l tends to 0^+ . We also note that $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ and $d_{\log \mathcal{O}}$ depend only on N and V , and thus $I(N, V, l)$ depends only on N, V and l . Finally, the condition $\delta < r_l$, which ensures that $I(N, V, l) \neq \emptyset$, is equivalent to

$$0 < l < \frac{d_{\log \mathcal{O}}}{\delta} = l_C(N, V).$$

So, we have just proved that

$$0 < l \|X_{\omega^{(0)}}(E, V)\| \leq d_{\log \mathcal{O}} \quad (7.41)$$

for every $l \in (0, l_C)$, for every $E \in I(N, V, l)$ and for every $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N$. Thus, for every $l \in (0, l_C)$ and every $E \in I(N, V, l)$,

$$lX_{\omega^{(0)}}(E, V) \in \log \mathcal{O} \quad (7.42)$$

for every $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N$. From this, we deduce that

$$T_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathcal{O} \quad (7.43)$$

for every $l \in (0, l_C)$, for every $E \in I(N, V, l)$ and for every $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N$. We actually get more from (7.42). As the exponential is a diffeomorphism from $\log \mathcal{O}$ into \mathcal{O} , we also have

$$\log T_{\omega^{(0)}}(E) = lX_{\omega^{(0)}}(E, V), \quad (7.44)$$

for every $l \in (0, l_C)$, for every $E \in I(N, V, l)$ and for every $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N$. But, from the beginning, we chose $V \in S_N(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{V}$ and, by Lemma 7.3.6, there exists a finite set $S_V \subset \mathbb{R}$ such that

$$\text{Lie}\{X_{\omega^{(0)}}(E, V) ; \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N\} = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \text{ for all } E \in \mathbb{R} \setminus S_V. \quad (7.45)$$

Now, by (7.44) and (7.45), as $l \in (0, l_C)$ is different from 0,

$$\text{Lie}\{\log T_{\omega^{(0)}}(E) ; \omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N\} = \mathfrak{sp}_N(\mathbb{R}) \quad (7.46)$$

for every $l \in (0, l_C)$ and every $E \in I(N, V, l) \setminus S_V$. By applying Theorem 7.2.2, we obtain that

$$G_{\{0,1\}}(E) \text{ is dense in } \text{Sp}_N(\mathbb{R}) \text{ for all } l \in (0, l_C) \text{ and all } E \in I(N, V, l) \setminus S_V. \quad (7.47)$$

Now, as the Fürstenberg group $G(E)$ is the closure of $G_{\{0,1\}}(E)$, we get

$$G(E) = \text{Sp}_N(\mathbb{R}) \text{ for all } l \in (0, l_C) \text{ and all } E \in I(N, V, l) \setminus S_V. \quad (7.48)$$

We have proved Proposition 7.3.1 because \mathcal{V} is of Lebesgue measure 0 (see (7.33)) and S_V is finite.

□

In a previous work we also used Theorem 7.2.2 to obtain the separability of the Lyapunov exponents for the model studied there. This model corresponds to the case $N = 2$ and $\ell = 1$ of $H_l(\omega)$. The main difference is that we could not let ℓ get small and then just control E , to ensure that $lX_{\omega^{(0)}}(E) \in \log \mathcal{O}$ and thus $T_{\omega^{(0)}}(E) \in \mathcal{O}$, uniformly on $\omega^{(0)} \in \{0, 1\}^N$. We had first used simultaneous diophantine approximation to find a suitable power of $T_{\omega^{(0)}}(E)$, say $(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)}$, which is in \mathcal{O} . Then arised difficulties with the computations of the logarithm. First, $\log(\exp(m_{\omega^{(0)}}(E)X_{\omega^{(0)}}(E))) \neq m_{\omega^{(0)}}(E)X_{\omega^{(0)}}(E)$ as $m_{\omega^{(0)}}(E)X_{\omega^{(0)}}(E) \notin \log \mathcal{O}$ in general. It leads to a problem of determination of the logarithm and the existence of a discrete set of critical energies \mathcal{S} such that, for $E \in \mathcal{S}$, $\log(T_{\omega^{(0)}}(E))^{m_{\omega^{(0)}}(E)}$ is not defined. Then, for $E \notin \mathcal{S}$, the expression of these logarithms being not simple, we could not use an algebraic result like Lemma 7.3.3 to prove that the Lie algebra generated by the logarithms is $\mathfrak{sp}_N(\mathbb{R})$. That is why we had to restrict ourselves to $N = 2$.

Chapitre 8

Régularité des exposants de Lyapounov et de la densité d'états intégrée

8.1 Régularité des exposants de Lyapounov

8.1.1 Mesures invariantes

Nous commençons par donner une définition de l'action d'un groupe sur un espace compact. Dans cette partie, G désigne un groupe localement compact d'élément unité e et B est un espace topologique.

Définition 8.1.1. On dit que G agit sur B si on peut associer continûment à chaque $(g, b) \in G \times B$ un élément gb de B tel que :

1. $g_1(g_2b) = (g_1g_2)b, \forall g_1, g_2 \in G$ et $\forall b \in B$.
2. $eb = b, \forall b \in B$.

Pour un tel couple (G, B) on peut supposer que l'on se donne une mesure μ sur G et une mesure ν sur B . On peut alors définir la pseudo-convolution de ces deux mesures.

Définition 8.1.2. La pseudo-convolution d'une mesure μ sur G et d'une mesure ν sur B est l'unique mesure $\mu * \nu$ sur B définie par :

$$\mu * \nu(f) = \int_{G \times B} f(gb) d\mu(g) d\nu(b)$$

pour toute fonction f sur B mesurable et bornée.

Remarque 8.1.3. Si $B = G$, alors cette pseudo-convolution coïncide avec la convolution ordinaire de deux mesures sur un groupe. On note alors dans ce cas μ^n la n -ième convolution de μ par elle-même : $\mu * \dots * \mu$.

Remarque 8.1.4. Si μ_1 et μ_2 sont des mesures sur G et si ν est une mesure sur B , alors on a : $(\mu_1 * \mu_2) * \nu = \mu_1 * (\mu_2 * \nu)$.

Nous pouvons maintenant définir l'importante notion de mesure invariante sur un espace topologique sur lequel agit un groupe. Dans la suite, on fixe une mesure de probabilité μ sur G .

Définition 8.1.5. Une mesure ν sur B est dite μ -invariante lorsque : $\mu * \nu = \nu$.

Pour p un entier, nous rappelons la définition de la sous-variété p -lagrangienne L_p de \mathbb{R}^{2N} : pour tout p dans $\{1, \dots, N\}$, L_p est le sous-espace vectoriel de $\wedge^p \mathbb{R}^{2N}$ engendré par $\{Me_1 \wedge \dots \wedge Me_p \mid M \in \text{Sp}_N(\mathbb{R})\}$.

Théorème 8.1.6. Soit $(A_n^\omega(E))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires symplectiques d'ordre $2N$ i.i.d. dépendant d'un paramètre réel E et soit p un entier dans $\{1, \dots, N\}$. Soit μ_E la distribution commune des $A_n^\omega(E)$. On suppose que le sous-groupe de Fürstenberg G_{μ_E} associé à cette suite de matrices symplectiques est p -contractant et L_p -fortement irréductible et que $\mathbb{E}(\log \|\wedge^p A_0^\omega(E)\|)$ est finie. Alors les assertions suivantes sont vraies :

1. $\gamma_p(E) > \gamma_{p+1}(E)$
2. Pour tout x non nul dans L_p :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|\wedge^p (A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))x\| = \sum_{i=1}^p \gamma_i(E)$$

3. Il existe une unique distribution de probabilité μ_E -invariante, notée $\nu_{p,E}$, sur $\mathbb{P}(L_p) = \{\bar{x} \in \mathbb{P}(\wedge^p \mathbb{R}^{2N}) \mid x \in L_p\}$ telle que :

$$\int_{\text{Sp}_N(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}(L_p)} \log \frac{\|\wedge^p Mx\|}{\|x\|} d\mu_E(M) d\nu_{p,E}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^p \gamma_i(E)$$

Le fait que l'on ait une représentation intégrale des exposants de Lyapounov mettant en jeu la mesure $\nu_{p,E}$, implique que pour étudier la régularité en fonction de E de ces exposants il nous suffira d'étudier la régularité de cette mesure vue comme fonction de E .

8.1.2 Continuité

Nous allons tout d'abord démontrer la continuité des exposants de Lyapounov par rapport au paramètre d'énergie E .

Théorème 8.1.7. Soit $(A_n^\omega(E))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de matrices symplectiques dépendant d'un paramètre réel E . Soit μ_E la loi commune des $A_n^\omega(E)$. On fixe un intervalle compact I dans \mathbb{R} et on suppose que pour tout $E \in I$:

1. G_{μ_E} est p -contractant et L_p -fortement irréductible pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.
2. Il existe $C_1 > 0, C_2 > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$:

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E)\|^2 \leq \exp(pC_1 + p|E| + p) \leq C_2. \quad (8.1)$$

3. Il existe $C_3 > 0$ indépendante de n, ω, E telle que pour tous $E, E' \in I$ et tout $p \in \{1, \dots, N\}$:

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E) - \wedge^p A_n^\omega(E')\| \leq C_3 |E - E'|. \quad (8.2)$$

Alors, pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$, $E \mapsto \gamma_p(E)$ est continue sur I .

Les méthodes pour démontrer ce résultat peuvent être trouvées dans [3], chapitre V. Dans cette référence, ce résultat de régularité est écrit pour une suite de matrices de transfert associées à des opérateurs de Schrödinger discrets et à valeurs matricielles. Or, cette restriction ne concerne que les estimations (8.1) et (8.2). Elles sont clairement vérifiées dans le cas de matrices de transfert associées à des opérateurs discrets. Ces estimations s'avèrent être aussi vérifiées dans le cas continu.

Les principales étapes de la preuve sont les suivantes. Tout d'abord, on démontre la continuité de la fonction

$$\Phi_{p,E} : \begin{array}{l} I \times \mathbb{P}(L_p) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (E, \bar{x}) \longmapsto \Phi_{p,E}(\bar{x}) = \mathbb{E} \left(\log \frac{\|(\wedge^p A_n^\omega(E))x\|}{\|x\|} \right) \end{array}$$

pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$. On utilise seulement les estimées (8.1) et (8.2) à ce stade. Ensuite on démontre la continuité faible de $E \mapsto \nu_{p,E}$ en utilisant le théorème de Banach-Alaoglu et l'unicité de la mesure μ_E -invariante $\nu_{p,E}$. En combinant ces deux propriétés de continuité et en remarquant que

$$\gamma_1(E) + \dots + \gamma_p(E) = \nu_{p,E}(\Phi_{p,E}),$$

on obtient la continuité des exposants de Lyapunov.

On fixe un entier $p \in \{1, \dots, N\}$ et un intervalle compact I comme dans le théorème 8.1.7. Pour $E \in I$ on pose :

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{P}(L_p), \Phi_{p,E}(\bar{x}) = \mathbb{E} \left(\log \frac{\|(\wedge^p A_n^\omega(E))x\|}{\|x\|} \right)$$

Dans la proposition suivante nous résumons les propriétés de la fonction $\Phi_{p,E}$.

Proposition 8.1.8. *La fonction $\Phi_{p,E}$ a les propriétés suivantes :*

1. $\bar{x} \mapsto \Phi_{p,E}(\bar{x})$ est continue sur $\mathbb{P}(L_p)$.
2. $\exists C > 0, \forall E, E' \in I, \sup_{\bar{x} \in \mathbb{P}(L_p)} |\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{x})| \leq C|E - E'|$.
3. La fonction

$$\Phi : I \times \mathbb{P}(L_p) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (E, \bar{x}) \longmapsto \Phi_{p,E}(\bar{x})$$

est continue.

Démonstration : D'après (8.1) on a :

$$\log \frac{\|(\wedge^p A_n^\omega(E))x\|}{\|x\|} \leq \log \|(\wedge^p A_n^\omega(E))\| \leq \log \sqrt{C_2}$$

De là, si $\bar{x}_l \rightarrow \bar{x}$ dans $\mathbb{P}(L_p)$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue (une constante est intégrable sur un espace de probabilité !) :

$$\Phi_{p,E}(\bar{x}_l) = \mathbb{E} \left(\log \frac{\|(\wedge^p A_n^\omega(E))x_l\|}{\|x_l\|} \right) \rightarrow \mathbb{E} \left(\log \frac{\|(\wedge^p A_n^\omega(E))x\|}{\|x\|} \right) = \Phi_{p,E}(\bar{x})$$

Cela prouve le premier point.

Pour deux matrices A et B , B étant supposée inversible : $\|Ax\| = \|AB^{-1}Bx\| \leq \|AB^{-1}\| \|Bx\|$.

D'où : $\frac{\|Ax\|}{\|Bx\|} \leq \|AB^{-1}\|$. Il vient alors :

$$\|AB^{-1}\| = \|(A - B + B)B^{-1}\| \leq \|A - B\| \|B^{-1}\| + \|I\| = \|A - B\| \|B^{-1}\| + 1$$

En utilisant cette inégalité et en utilisant à la dernière inégalité, (8.2), on a :

$$\begin{aligned} |\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{x})| &= \left| \mathbb{E} \left(\log \frac{\|(\wedge^p A_n^\omega(E))x\|}{\|(\wedge^p A_n^\omega(E'))x\|} \right) \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left(\log \|(\wedge^p A_n^\omega(E))(\wedge^p A_n^\omega(E'))^{-1}\| \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\log (\|(\wedge^p A_n^\omega(E)) - (\wedge^p A_n^\omega(E'))\| \|(\wedge^p A_n^\omega(E'))^{-1}\| + 1) \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\|(\wedge^p A_n^\omega(E)) - (\wedge^p A_n^\omega(E'))\| \|(\wedge^p A_n^\omega(E'))^{-1}\| \right) \\ &\leq C_3 |E - E'| \sqrt{C_2} \end{aligned}$$

Cela prouve le point (ii).

Pour prouver le troisième point il nous faut juste combiner les points (i) et (ii). Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons (E, \bar{x}) et (E', \bar{y}) suffisamment proches pour que :

$$\begin{aligned} |\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{y})| &\leq |\Phi_{p,E}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{x})| + |\Phi_{p,E'}(\bar{x}) - \Phi_{p,E'}(\bar{y})| \\ &\leq C|E - E'| + \varepsilon \\ &\leq \text{Cte } \varepsilon \end{aligned}$$

Cela termine la preuve. □

A l'aide de cette proposition nous allons pouvoir prouver la continuité des exposants de Lyapounov.

Proposition 8.1.9. *L'application $E \mapsto (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E)$ est continue sur I .*

Démonstration : On fixe $E \in I$. Soit E_l une suite de réels dans I , convergent vers E . Par le théorème 8.1.6 il existe une unique mesure $\nu_{p,E}$, μ_E -invariante sur $\mathbb{P}(L_p)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe ν_{p,E_l} , μ_{E_l} -invariante sur $\mathbb{P}(L_p)$. Par (8.1), on a : $\mu_{E_l} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{w} \mu_E$.

Par le théorème de Banach-Alaoglu, la suite $(\nu_{p,E_l})_{l \in \mathbb{N}}$ contient une sous-suite, disons $(\nu_{p,E_{l_i}})_{i \in \mathbb{N}}$, faiblement convergente vers une limite $\tilde{\nu}$. Comme la convolution est faiblement continue :

$$\nu_{p,E_{l_i}} = \mu_{E_{l_i}} * \nu_{p,E_{l_i}} \xrightarrow[l_i \rightarrow \infty]{w} \mu_E * \tilde{\nu}$$

Alors par unicité de la limite faible : $\tilde{\nu} = \mu_E * \tilde{\nu}$. Ainsi $\tilde{\nu}$ est une mesure μ_E -invariante et par unicité dans le théorème 8.1.6 : $\tilde{\nu} = \nu_{p,E}$. On en déduit que $\nu_{p,E_{l_i}} \xrightarrow[l_i \rightarrow \infty]{w} \nu_{p,E}$ et donc $E \mapsto \nu_{p,E}$ est faiblement continue.

D'après la représentation intégrale donnée par le théorème 8.1.6 on a :

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E) = \nu_{p,E}(\Phi_{p,E})$$

Alors en utilisant le (ii) de la proposition 8.1.8 et la faible continuité que nous venons juste de prouver il vient :

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E_l) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \nu_{p,E_l}(\Phi_{p,E_l}) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} (\nu_{p,E_l}(\Phi_{p,E}) + \nu_{p,E_l}(\Phi_{p,E_l} - \Phi_{p,E})) \\ &= \nu_{p,E}(\Phi_{p,E}) \\ &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E) \end{aligned}$$

Cela prouve bien la continuité des sommes d'exposants de Lyapounov. □

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 8.1.10. *Pour tout entier $p \in \{1, \dots, N\}$, $E \mapsto \gamma_p(E)$ est continue.*

Démonstration : En effet on peut écrire :

$$\gamma_p(E) = (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E) - (\gamma_1 + \dots + \gamma_{p-1})(E)$$

□

8.1.3 Sous-harmonicité des sommes d'exposants de Lyapounov

Dans toute cette section, on suppose que les exposants de Lyapounov que l'on étudie sont associés à une suite $(A_n^\omega(E))_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices symplectiques *i.i.d.* qui dépendent analytiquement du paramètre E . Cela est vérifié pour les matrices de transfert associées à un modèle continu (ou discret) car son expression met en jeu uniquement des solutions de $-u'' + V_\omega u = Eu$ qui sont analytiques en E .

Tout d'abord on remarque que la définition des exposants de Lyapounov nous permet de les définir pour des valeurs complexes de l'énergie E . En fait la formule :

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} (\log \| \wedge^p (A_n^\omega(E) \dots A_0^\omega(E)) \|)$$

a aussi un sens pour $E \in \mathbb{C}$.

Nous allons maintenant définir les fonctions sous-harmoniques et en donner les premières propriétés.

Définition 8.1.11. Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique si :

1. f est semi-continue supérieurement, i.e. : $\forall E \in \mathbb{C}, f(E) \geq \limsup_{y \rightarrow E} f(y)$
2. $\forall E \in \mathbb{C}, \forall r > 0, f(E) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E + re^{i\theta}) d\theta$.

Remarque 8.1.12. Bien sûr une fonction continue est semi-continue supérieurement et la première hypothèse de la définition est satisfaite par les sommes d'exposants de Lyapounov comme prouvé dans la proposition 8.1.9.

Nous allons à présent prouver une proposition qui donne les principales propriétés de stabilité de l'ensemble des fonctions sous-harmoniques et le principal exemple de fonction sous-harmonique.

Proposition 8.1.13. 1. Si f et g sont deux fonctions sous-harmoniques égales presque partout au sens de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^2 , elles sont égales partout.

2. Si f_n est une suite de fonctions sous-harmoniques localement minorées, alors l'infimum pris point par point de cette suite est une fonction sous-harmonique.
3. Si $A(z)$ est une fonction entière à valeurs matricielles, la fonction $z \mapsto \log \|A(z)\|$ est sous-harmonique.

Démonstration : (i) On fixe $E \in \mathbb{C}$. Par le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques on a :

$$\forall r > 0, f(E) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(E,r)} f(z) dz$$

Puis par semi-continuité supérieure :

$$f(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(E,r)} f(z) dz$$

De là si $f = g$ presque sûrement, il vient :

$$f(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(E,r)} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(E,r)} g(z) dz = g(E)$$

Et le premier point est prouvé.

(ii) Une fonction semi-continue supérieurement est minorée sur tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{C}$. On fixe un compact $K \subset \mathbb{C}$. On peut alors appliquer localement le théorème de convergence dominé de Lebesgue pour obtenir :

$$\forall E \in K, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(E) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(E + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(E + re^{i\theta}) d\theta,$$

et l'infimum d'une famille de fonctions semi-continues supérieurement est encore une fonction semi-continue supérieurement.

(iii) Ce point vient de la formule de Jensen sur le logarithme des fonctions holomorphes. □

Nous avons à présent tout ce qu'il nous faut pour prouver la sous-harmonicité des sommes d'exposant de Lyapounov.

Proposition 8.1.14. *Pour tout $p = 1, \dots, N$, la fonction $E \mapsto \gamma_1(E) + \dots + \gamma_p(E)$ est sous-harmonique.*

Démonstration : Tout d'abord, la fonction $E \mapsto A_n^\omega(E)$ est entière par hypothèse. Puis, comme un produit de fonctions entières est une fonction entière, $E \mapsto \wedge^p(A_n^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))$ est aussi entière. Finalement par le point (iii) de la proposition 8.1.13, $E \mapsto \log \|\wedge^p(A_n^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))\|$ est encore sous-harmonique.

Par le lemme de Fatou, l'application $E \mapsto \mathbb{E}(\log \|\wedge^p(A_n^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))\|)$ est aussi sous-harmonique. Or la suite $(\frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|\wedge^p(A_n^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))\|))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite sous-additive de nombres strictement positifs, sa limite est donc donnée par un infimum et le point (ii) de la proposition 8.1.13 s'applique pour donner que $\gamma_1(E) + \dots + \gamma_p(E)$ est sous-harmonique. □

Pour terminer cette section nous rappelons sans preuve l'une des propriétés les plus intéressantes des fonctions sous-harmoniques, l'existence de limites non-tangentielles.

Proposition 8.1.15. *Pour presque tout $E \in \mathbb{R}$, pour tout $p = 1, \dots, N$, la limite suivante existe et vaut :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E + i\varepsilon) = (\gamma_1 + \dots + \gamma_p)(E)$$

Démonstration : On utilise le fait que toute fonction sous-harmonique sur \mathbb{C} est non-tangentielllement continue en presque tout point de la droite réelle au sens de la mesure de Lebesgue. □

8.1.4 Régularité Höldérienne

Avec beaucoup plus de travail, on peut obtenir le théorème général suivant de régularité höldérienne des exposants de Lyapunov.

Théorème 8.1.16. *Soit $(A_n^\omega(E))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de matrice symplectiques dépendant d'un paramètre réel E . Soit μ_E la loi commune des $A_n^\omega(E)$. On fixe un intervalle compact I dans \mathbb{R} et on suppose que pour tout $E \in I$:*

1. G_{μ_E} est p -contractant et L_p -fortement irréductible pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$.

2. Il existe $C_1 > 0, C_2 > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$:

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E)\|^2 \leq \exp(pC_1 + p|E| + p) \leq C_2. \quad (8.3)$$

3. Il existe $C_3 > 0$ indépendante de n, ω, E telle que pour tous $E, E' \in I$ et tout $p \in \{1, \dots, N\}$:

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E) - \wedge^p A_n^\omega(E')\| \leq C_3|E - E'|. \quad (8.4)$$

Il existe alors deux réels $\alpha > 0$ et $0 < C < +\infty$ tels que :

$$\forall p \in \{1, \dots, N\}, \forall E, E' \in I, |\gamma_p(E) - \gamma_p(E')| \leq C|E - E'|^\alpha.$$

Pour prouver ce résultat, on utilise un résultat sur les cocycles négatifs comme énoncé dans [3], Proposition IV 3.5, p.187. On a aussi besoin d'estimations sur les opérateurs de Laplace sur les espaces de Hölder comme dans Proposition V 4.13, p.277 dans [3] et qui utilisent les estimées (8.3) et (8.4). Finalement en utilisant la décomposition donnée dans Proposition IV 3.12, p.192 de [3] on peut démontrer la continuité Höldérienne de $E \mapsto \nu_{p,E}$ sur I .

8.1.5 Application au modèle d'Anderson continu à valeurs matricielles

Dans un intervalle pour lequel on aurait déjà montré que le groupe de Fürstenberg est p -contractant et L_p irréductible pour tout p , il reste à montrer les estimées (8.3) et (8.4) pour pouvoir appliquer le théorème 8.1.16.

Estimations générales

Lemme 8.1.17. Soit V une fonction à valeurs matricielles dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$ et soit u une solution de $-u'' + Vu = 0$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\|u(x)\|^2 + \|u'(x)\|^2 \leq (\|u(y)\|^2 + \|u'(y)\|^2) \exp\left(\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} \|V(t) + 1\| dt\right)$$

Démonstration : On pose $R(t) = \|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2$. Il vient avec cette notation :

$$\begin{aligned} R'(t) &= \langle u(t), u'(t) \rangle + \langle u'(t), u(t) \rangle + \langle u''(t), u'(t) \rangle + \langle u'(t), u''(t) \rangle \\ &= 2\text{Re}(\langle u(t), u'(t) \rangle) + 2\text{Re}(\langle u'(t), V(t)u(t) \rangle) \\ &= 2\text{Re}(\langle u'(t), (V(t) + 1)u(t) \rangle) \\ &\leq 2\text{Re}(\|u'(t)\| \|V(t) + 1\| \|u(t)\|) \\ &\leq 2\|V(t) + 1\| \left(\frac{\|u(t)\|^2 + \|u'(t)\|^2}{2}\right) \\ &= \|V(t) + 1\| R(t) \end{aligned}$$

Nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la quatrième ligne et l'inégalité arithmético-géométrique à la cinquième. Finalement on a l'inégalité :

$$R'(t) \leq \|V(t) + 1\| R(t)$$

qui par intégration nous donne l'inégalité voulue. □

Lemme 8.1.18. Pour $i = 1, 2$ soit $V_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$ et soit u_i une solution de $-u'' + V_i u = 0$ telles que :

$$\exists y \in \mathbb{R}, u_1(y) = u_2(y) \text{ et } u'_1(y) = u'_2(y)$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \left(\|u_1(x) - u_2(x)\|^2 + \|u'_1(x) - u'_2(x)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\|u_1(y)\|^2 + \|u'_1(y)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} (\|V_1(t)\| + \|V_2(t)\| + 2) dt \right) \times \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} \|V_1(t) - V_2(t)\| dt \end{aligned}$$

Démonstration : Sans restreindre la généralité on peut supposer que $y \leq x$. Dans \mathbb{C}^{2N} on a, de par les hypothèses faites sur les solutions u_1 et u_2 :

$$\begin{pmatrix} u_1(x) - u_2(x) \\ u'_1(x) - u'_2(x) \end{pmatrix} = \int_x^y \begin{pmatrix} 0 \\ (V_1(t) - V_2(t))u_1(t) \end{pmatrix} dt + \int_x^y \begin{pmatrix} 0 & I \\ V_2(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ u'_1(t) - u'_2(t) \end{pmatrix} dt$$

Alors, en prenant la norme des deux côtés de l'égalité, on obtient l'inégalité suivante :

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x) - u_2(x) \\ u'_1(x) - u'_2(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \int_x^y \|V_1(t) - V_2(t)\| \|u_1(t)\| dt + \int_x^y (\|V_2(t)\| + 1) \left\| \begin{pmatrix} u_1(t) - u_2(t) \\ u'_1(t) - u'_2(t) \end{pmatrix} \right\| dt$$

Puis par le lemme de Gronwall :

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x) - u_2(x) \\ u'_1(x) - u'_2(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \left(\int_x^y \|V_1(t) - V_2(t)\| \|u_1(t)\| dt \right) \exp \left(\int_x^y (\|V_2(t)\| + 1) dt \right) \quad (8.5)$$

Or, le lemme 8.1.17 nous dit que pour tout $t \in [y, x]$:

$$\|u_1(t)\|^2 \leq \|u_1(y)\|^2 + \|u'_1(y)\|^2 \leq (\|u_1(y)\|^2 + \|u'_1(y)\|^2) \exp \left(\int_x^y (\|V_1(s)\| + 1) ds \right)$$

Ainsi :

$$\|u_1(t)\| \leq (\|u_1(y)\|^2 + \|u'_1(y)\|^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{1}{2} \int_x^y (\|V_1(s)\| + 1) ds \right)$$

Si l'on réinjecte dans l'inégalité (8.5) il vient :

$$\begin{aligned} & \left(\|u_1(x) - u_2(x)\|^2 + \|u'_1(x) - u'_2(x)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\|u_1(y)\|^2 + \|u'_1(y)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} \frac{1}{2} \|V_1(t)\| + \frac{1}{2} + \|V_2(t)\| + 1 dt \right) \times \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} \|V_1(t) - V_2(t)\| dt \end{aligned}$$

On a ainsi prouvé l'inégalité voulue car : $\frac{1}{2} \|V_1(t)\| + \frac{1}{2} \leq \|V_1(t)\| + 1$.

□

Estimations de la norme des matrices de transfert

A partir des estimations générales que l'on vient de prouver, on peut obtenir des estimations pour la norme des matrices de transfert, uniformes en le paramètre E lorsque celui-ci varie dans un intervalle compact de \mathbb{R} . On fixe un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$. Soit $E \in I$. Tout d'abord, u^1, \dots, u^{2N} désignent les solutions de $-u'' + V_\omega u = Eu$ avec les conditions initiales :

$$\tilde{u}^1(n, E) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{u}^2(n, E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{u}^{2N}(n, E) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

où $\tilde{u}^l(n, E) = {}^t(u^l(n, E) \ (u^l)'(n, E))$.

La matrice de transfert est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\tilde{u}^l(n+1, E)$:

$$A_n^\omega(E) = \begin{pmatrix} u_1^1(n+1, E) & u_1^2(n+1, E) & \dots & u_1^{2N}(n+1, E) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_N^1(n+1, E) & u_N^2(n+1, E) & \dots & u_N^{2N}(n+1, E) \\ (u_1^1)'(n+1, E) & (u_1^2)'(n+1, E) & \dots & (u_1^{2N})'(n+1, E) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_N^1)'(n+1, E) & (u_N^2)'(n+1, E) & \dots & (u_N^{2N})'(n+1, E) \end{pmatrix}$$

Lemme 8.1.19. *Il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que :*

$$\|A_n^\omega(E)\|^2 \leq \exp(C_1 + |E| + 1) \leq C_2$$

Démonstration : Soit $\tilde{u}^i(n+1, E)$ la colonne de $A_n^\omega(E)$ de norme maximale. Alors :

$$\|A_n^\omega(E)\|^2 = \|\tilde{u}^i(n+1, E)\|^2 = \|u^i(n+1, E)\|^2 + \|(u^i)'(n+1, E)\|^2$$

En appliquant le lemme 8.1.17 avec $x = n+1$ et $y = n$:

$$\begin{aligned} & \|u^i(n+1, E)\|^2 + \|(u^i)'(n+1, E)\|^2 \\ & \leq \left(\|u^i(n, E)\|^2 + \|(u^i)'(n, E)\|^2 \right) \exp \left(\int_n^{n+1} \|V_\omega(t) - E\| + 1 dt \right) \end{aligned}$$

Or, $\|u^i(n, E)\|^2 = 1$ et $\|(u^i)'(n, E)\|^2 = 0$ ou $\|u^i(n, E)\|^2 = 0$ et $\|(u^i)'(n, E)\|^2 = 1$. Dans tous les cas : $\|\tilde{u}^i(n, E)\|^2 = 1$. Donc

$$\|A_n^\omega(E)\|^2 \leq \exp \left(\int_n^{n+1} \|V_\omega(t) - E\| + 1 dt \right)$$

Or $V_\omega(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x-k)$ est invariant par la translation par 1. Ainsi :

$$\int_n^{n+1} \|V_\omega(t) - E\| + 1 dt = \int_0^1 \|V_\omega(t) - E\| + 1 dt \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} \|V_\omega(t)\| \right) + |E| + 1$$

Puis comme dans V_ω , les ω_i prennent leurs valeurs dans $\{0, 1\}$, il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de ω, n, E telle que :

$$\left(\sup_{t \in [0,1]} \|V_\omega(t)\| \right) \leq C_1$$

Et :

$$\|A_n^\omega(E)\|^2 \leq \exp(C_1 + |E| + 1)$$

Puis, étant donné que I est borné, $|E|$ est aussi bornée et il existe une constante $C_2 > 0$ indépendante de ω, n, E telle que :

$$\exp(C_1 + |E| + 1) \leq C_2.$$

□

Remarque 8.1.20. Comme $A_n^\omega(E)$ est symplectique, sa norme est la même que celle de son inverse et ainsi :

$$\|A_n^\omega(E)^{-1}\|^2 \leq C_2$$

Nous allons maintenant prouver une estimation nous donnant la variation de la norme de $A_n^\omega(E)$ lorsque E varie dans I .

Lemme 8.1.21. Pour tous $E, E' \in I$, il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de n, ω, E telle que :

$$\|A_n^\omega(E) - A_n^\omega(E')\| \leq C_3|E - E'|$$

Démonstration : On a :

$$\|A_n^\omega(E) - A_n^\omega(E')\| = \|\tilde{u}^i(n+1, E) - \tilde{u}^i(n+1, E')\|$$

Et d'après le lemme 8.1.18 :

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}^i(n+1, E) - \tilde{u}^i(n+1, E')\| \\ & \leq \|\tilde{u}^i(n, E)\| \left(\int_n^{n+1} \|V_\omega(t) - E - (V_\omega(t) - E')\| dt \right) \exp \left(\int_n^{n+1} \|V_\omega(t) - E\| + \|(V_\omega(t) - E')\| + 2 dt \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|A_n^\omega(E) - A_n^\omega(E')\| \leq |E - E'| \exp \left(\int_0^1 2\|V_\omega(t)\| + |E| + |E'| + 2 dt \right)$$

Mais, comme dans la preuve du lemme 8.1.19, $\sup_{t \in [0,1]} \|V_\omega(t)\| \leq C_1$ et $|E|$ et $|E'|$ sont bornées car I l'est, disons par une constante M . Alors il existe $C_3 > 0$ indépendante de n, ω, E telle que :

$$\exp \left(\int_n^{n+1} \|V_\omega(t) - E\| + \|(V_\omega(t) - E')\| + 2 dt \right) \leq \exp(2C_1 + 2 + 2M) \leq C_3$$

Notre estimation est prouvée. □

Nous terminons en donnant les estimations portant sur les puissances p -ièmes extérieures des matrices de transfert.

Lemme 8.1.22. Il existe des constantes $C'_1 > 0$, $C'_2 > 0$ et $C'_3 > 0$ indépendantes de n, ω, E telles que pour tout entier $p \in \{1, \dots, N\}$:

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E)\|^2 \leq \exp(pC'_1 + p|E| + p) \leq C'_2$$

et pour tous $E, E' \in I$:

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E) - \wedge^p A_n^\omega(E')\| \leq C'_3|E - E'|$$

Démonstration : Pour la première inégalité on utilise simplement le fait général suivant : si $M \in \text{GL}_{2N}(\mathbb{R})$ alors : $\|\wedge^p M\| \leq \|M\|^p$. Cela vient de la décomposition polaire de M . On peut en trouver la preuve dans [1] lemmes 5.3 et 5.4, page 62. Ainsi en appliquant ce résultat et le lemme 8.1.19 on obtient :

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E)\|^2 \leq (\exp(C_1 + |E| + 1))^p = \exp(pC_1 + p|E| + p) \leq C'_2$$

Pour la seconde inégalité, le résultat est un peu plus technique. Nous allons prouver que pour deux matrices inversibles M et N :

$$\|\wedge^p M - \wedge^p N\| \leq \|N - M\|(\|N\|^{p-1} + \|M\|\|N\|^{p-2} + \dots + \|M\|^{p-1})$$

Pour cela on part de :

$$\wedge^p M - \wedge^p N = \wedge^p M(I - \wedge^p(M^{-1}N)) = \wedge^p M(I - \wedge^p(M^{-1}(N - M) + I))$$

Ainsi on est ramené à calculer $\wedge^p(M^{-1}(N - M) + I)$. Pour $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$ un vecteur p -décomposable on a :

$$\begin{aligned} & \wedge^p(M^{-1}(N - M) + I)(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \\ &= (u_1 + M^{-1}(N - M)u_1) \wedge \dots \wedge (u_p + M^{-1}(N - M)u_p) \\ &= u_1 \wedge \dots \wedge (u_p + M^{-1}(N - M)u_p) + M^{-1}(N - M)u_1 \wedge \dots \wedge (u_p + M^{-1}(N - M)u_p) \\ & \quad \vdots \\ &= u_1 \wedge \dots \wedge u_p + \dots + u_1 \wedge \dots \wedge M^{-1}(N - M)u_p \end{aligned}$$

Ainsi on trouve l'expression suivante pour $\wedge^p M(I - \wedge^p(M^{-1}(N - M) + I))$:

$$\begin{aligned} & \wedge^p M(I - \wedge^p(M^{-1}(N - M) + I))(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \\ &= -((N - M)u_1 \wedge Nu_2 \wedge \dots \wedge Nu_p + Mu_1 \wedge (N - M)u_2 \wedge \dots \wedge Nu_p + \dots \\ & \quad \dots + Mu_1 \wedge \dots \wedge Mu_{p-1} \wedge (N - M)u_p) \end{aligned}$$

Finalement, en prenant les normes, on obtient l'estimation suivante :

$$\|\wedge^p M - \wedge^p N\| \leq \|N - M\|(\|N\|^{p-1} + \|M\|\|N\|^{p-2} + \dots + \|M\|^{p-1})$$

À présent, en appliquant les lemmes 8.1.19 et 8.1.21 et cette estimation avec $M = A_n^\omega(E)$ et $N = A_n^\omega(E')$, on obtient :

$$\|\wedge^p A_n^\omega(E) - \wedge^p A_n^\omega(E')\| \leq pC_2^{p-1}C_3|E - E'|$$

et $C_3' = pC_2^{p-1}C_3$ est indépendante de n, ω et de E, E' .

□

8.2 La densité d'états intégrée

On veut étudier l'existence de la densité d'états intégrée et sa régularité pour des opérateurs d'Anderson continus et à valeurs matricielles de la forme :

$$H_A(\omega) = -\Delta_d \otimes I_N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_\omega^{(n)}(x - n) \quad (8.7)$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^N$, d et N sont des entiers naturels, I_N est la matrice identité d'ordre N et Δ_d est le laplacien continu en dimension d .

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et soit $\omega \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $x \mapsto V_\omega^{(n)}(x)$ sont à valeurs dans les matrices symétriques, à support dans $[0, 1]^d$, et uniformément bornées en x, n et ω . On pose aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, V_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_\omega^{(n)}(x - n)$$

et on note V_ω l'opérateur de multiplication maximal par $x \mapsto V_\omega(x)$. La fonction $x \mapsto V_\omega(x)$ est uniformément bornée sur \mathbb{R} en x et en ω . Le potentiel V_ω sera aussi choisi de sorte que $H_A(\omega)$ soit \mathbb{Z}^d -ergodique. En tant que perturbation bornée de $-\Delta_d \otimes I_N$, $H_A(\omega)$ est auto-adjoint sur l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^N$.

8.2.1 Existence de la densité d'états intégrée

On veut définir une fonction de la variable réelle qui compte le nombre de valeurs spectrales de $H_A(\omega)$ en-dessous d'une énergie E fixée. Pour définir cette fonction, on commence par restreindre $H_A(\omega)$ à des cubes de volume fini dans \mathbb{R}^d . Soit L un entier plus grand que 1 et soit $D = [-L, L]^d \subset \mathbb{R}^d$ le cube centré en 0 et de côté $2L$. On pose :

$$H_A^{(D)}(\omega) = -\Delta_d^{(D)} \otimes I_N + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} V_\omega^{(n)}(x - n) \quad (8.8)$$

la restriction de $H_A(\omega)$ agissant sur $L^2(D) \otimes \mathbb{C}^N$ avec conditions de Dirichlet au bord de D .

Définition 8.2.1. La densité d'état intégrée de $H_A(\omega)$ est la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ , $E \mapsto N(E)$ où $N(E)$ pour $E \in \mathbb{R}$ est défini comme la limite thermodynamique :

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{|D|} \#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_A^{(D)}(\omega))\} \quad (8.9)$$

où $|D|$ est le volume de D .

Il y a un double problème d'existence dans l'expression (8.9). On doit tout d'abord prouver que le cardinal $\#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_A^{(D)}(\omega))\}$ est fini pour tout E fixé et on doit ensuite prouver l'existence de la limite. La réponse à ces deux problèmes est donnée par l'existence d'un noyau L^2 pour le sous-groupe à un paramètre $(e^{-tH_A^{(D)}(\omega)})_{t>0}$. Ce noyau est obtenu à l'aide d'une formule de Feynmann-Kac mettant en jeu une exponentielle ordonnée.

Une formule de Feynmann-Kac à valeurs matricielles

On commence par présenter comment on obtient une formule de Feynman-Kac à valeurs matricielles pour le semi-groupe à un paramètre $(e^{-tH_A(\omega)})_{t>0}$. On en déduit ensuite une formule de Feynman-Kac pour $(e^{-tH_A^{(D)}(\omega)})_{t>0}$.

Soit $W = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} . Pour tout $t \geq 0$ on considère la fonction coordonnée :

$$X_t : \begin{array}{l} W \longrightarrow \mathbb{R} \\ w \longmapsto X_t(w) = w(t) \end{array}$$

Soit \mathcal{W} la plus petite σ -algèbre sur W pour laquelle les applications X_t sont mesurables. Pour $s, t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$ on note par $W_{s,x,t,y}$ la mesure de Wiener conditionnelle, définie sur (W, \mathcal{W}) , associée au mouvement brownien partant de x au temps s et arrivant en y au temps t . On note aussi $\mathbb{E}_{s,x,t,y}$ l'espérance associée à la mesure $W_{s,x,t,y}$.

On étudie maintenant le semi-groupe à un paramètre $(e^{-tH_A(\omega)})_{t>0}$. On fixe $t > 0$ et $\omega \in \Omega$. Par la formule de Lie-Trotter, on a :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^N, e^{-tH_A(\omega)} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-(-\Delta_d \otimes I_N) \frac{t}{n}} e^{-V_\omega \frac{t}{n}} \right)^n f. \quad (8.10)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'opérateur :

$$\left(e^{-(-\Delta_d \otimes I_N) \frac{t}{n}} e^{-V_\omega \frac{t}{n}} \right)^n$$

a un noyau intégral donné par l'intégrale de chemin :

$$\int \prod_{j=1}^n e^{-\left(\frac{t}{n}\right) \cdot V_\omega(w(\frac{t}{n}))} dW_{0,x,t,y}(w). \quad (8.11)$$

Mais, lorsque n tend vers l'infini, par définition de l'exponentielle ordonnée de Dyson :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n e^{-\left(\frac{t}{n}\right) \cdot V_\omega(w(\frac{t}{n}))} = \exp_{\text{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(w(s)) ds \right). \quad (8.12)$$

Alors, par convergence dominée,

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^N, \forall x \in \mathbb{R}^d, e^{-tH_A(\omega)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K_t(x, y) f(y) dx \quad (8.13)$$

où

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, K_t(x, y) = \int \exp_{\text{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(w(s)) ds \right) dW_{0,x,t,y}(w). \quad (8.14)$$

On vient donc de démontrer que $e^{-tH_A(\omega)}$ a un noyau intégral, $K_t(x, y)$. Voyons comment on en déduit l'existence d'un noyau intégral pour $e^{-tH_A^{(D)}(\omega)}$. On note $T_D(w)$ l'instant de première sortie de D du chemin $w \in W$:

$$T_D(w) = \inf\{t > 0, X_t(w) \notin D\}. \quad (8.15)$$

Puisque l'on utilise des conditions de Dirichlet au bord de D , pour définir $H_A^{(D)}(\omega)$ on peut utiliser les résultats sur les mouvements browniens tués qui conduisent à la formule :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^N, \forall x \in \mathbb{R}^d, e^{-tH_A^{(D)}(\omega)} f(x) = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} \int \chi_{\{t < T_D(w)\}}(w) \exp_{\text{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(X_s(w)) ds \right) dW_{0,x,t,y}(w) e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y) dy. \end{aligned} \quad (8.16)$$

On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 8.2.2. *Pour tout $t > 0$, $e^{-tH_A^{(D)}(\omega)}$ a un noyau intégral donné par :*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, K_t^{(D)}(x, y) = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\int \chi_{\{t < T_D(w)\}}(w) \exp_{\text{ord}} \left(- \int_0^t V_\omega(X_s(w)) ds \right) dW_{0,x,t,y}(w) e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} \right) \end{aligned} \quad (8.17)$$

et $K_t^{(D)}$ est dans $L^2(D^2) \otimes \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ pour tout $t > 0$.

Existence de la densité d'états intégrée

Puisque le noyau est dans L^2 , on en déduit que pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{-tH_A^{(D)}(\omega)}$ est Hilbert-Schmidt sur $L^2(D) \otimes \mathbb{C}^N$. En particulier il est compact et son spectre est de la forme :

$$\{e^{-t\lambda_j^{(D)}(\omega)}, j \geq 0\}$$

où $(\lambda_j^{(D)}(\omega))_{j \geq 0}$ est une suite croissante de nombre réels bornée inférieurement et qui tend vers $+\infty$. Cette suite n'est autre que le spectre de $H_A^{(D)}(\omega)$. En particulier, pour $E \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_A^{(D)}(\omega))\} = \#\{\lambda_j^{(D)}(\omega) \leq E\} < +\infty.$$

Cela répond au premier problème soulevé pour démontrer l'existence de $N(E)$.

IL reste à démontrer que la suite $\left(\frac{1}{|D|}\#\{\lambda_j^{(D)}(\omega) \leq E\}\right)_{L \geq 1}$ converge vers un nombre réel indépendant de ω : $N(E)$. Pour cela on introduit la mesure de comptage des valeurs propres de $H_A^{(D)}(\omega)$:

$$n_{D,\omega} = \frac{1}{|D|} \sum_{j \geq 0} \delta_{\lambda_j^{(D)}(\omega)} \quad (8.18)$$

où $\delta_{\lambda_j^{(D)}(\omega)}$ est la mesure de Dirac en $\lambda_j^{(D)}(\omega)$. On a alors :

Proposition 8.2.3. *La suite de mesures $(n_{D,\omega})_{L \geq 1}$ converge vaguement vers une mesure n indépendante de ω lorsque L tend vers l'infini et ce pour P -presque tout ω dans Ω . De plus, la transformée de Laplace de cette mesure limite est donnée par : $\forall t > 0$,*

$$L(n)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int \int_{\Omega} \text{Tr}_{\mathbb{C}^N} \exp_{\text{ord}} \left(- \int_0^t V_{\omega}(X_s(w)) ds \right) d\omega dW_{0,0,t,0}(w). \quad (8.19)$$

Corollaire 8.2.4. *Pour tout $E \in \mathbb{R}$, la limite :*

$$N(E) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{|D|} \#\{\lambda \leq E \mid \lambda \in \sigma(H_A^{(D)}(\omega))\}$$

existe et est P -presque sûrement indépendante de ω . La fonction $E \mapsto N(E)$ est la fonction de répartition de n :

$$\forall E \in \mathbb{R}, N(E) = n((-\infty, E]).$$

On termine en donnant une fomule qui fait le lien entre la mesure n et la mesure spectrale $E_{H_A(\omega)}$ associée à l'opérateur auto-adjoint $H_A(\omega)$.

Proposition 8.2.5. *Soit f une fonction continue à support compact sur \mathbb{R}^d , positive et telle que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Soit M_f l'opérateur maximal de multiplication par f . Alors, pour tout borélien borné B de \mathbb{R} , l'opérateur $M_f E_{H_A(\omega)}(B) M_f$ est de classe trace P -presque sûrement en ω et :*

$$n(B) = \mathbb{E}(\text{Tr}(M_f E_{H_A(\omega)}(B) M_f)) \quad (8.20)$$

où \mathbb{E} est l'espérance associée à la mesure de probabiité P .

On veut maintenant, dans le cas où $d = 1$, faire le lien entre $N(E)$ et la somme des exposants de Lyapounov en E . Avant cela, nous allons présenter la fonction w de Kotani.

Dans toute la suite on suppose $d = 1$.

8.2.2 Fonction w de Kotani

Avant de définir la fonction w de Kotani on définit les fonctions m . Soit \mathbb{C}_+ le demi-plan supérieur complexe $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et \mathbb{C}_- le demi-plan inférieur $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) < 0\}$.

Proposition 8.2.6. *Soit $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. On fixe $\omega \in \Omega$. Il existe alors une unique fonction $x \mapsto F_+(x, E)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ (respectivement $x \mapsto F_-(x, E)$) satisfaisant :*

$$-F_+'' + V_\omega F_+ = E F_+, F_+(0, E) = I, \text{ et } \int_0^\infty \|F_+(x, E)\|^2 dx < +\infty$$

respectivement :

$$-F_-'' + V_\omega F_- = E F_-, F_-(0, E) = I, \text{ et } \int_{-\infty}^0 \|F_-(x, E)\|^2 dx < +\infty.$$

Définition 8.2.7. *Pour $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ on définit les fonctions m , M_+ et M_- associées à $H_A(\omega)$ par :*

$$M_+(E) = \frac{d}{dx} F_+(x, E)|_{x=0} \text{ et } M_-(E) = -\frac{d}{dx} F_-(x, E)|_{x=0}.$$

Ces fonctions permettent de calculer le noyau de Green de la résolvante de $H_A(\omega)$ hors de la droite réelle.

Proposition 8.2.8. *Soit $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. Alors $(H_A(\omega) - E)^{-1}$ a un noyau intégral continu $G_E(x, y, \omega)$ donné par :*

$$G_E(x, y, \omega) = \begin{cases} -F_-(x)(M_+ + M_-)^{-1} {}^t F_+(y) & \text{si } x \leq y \\ -F_+(x)(M_+ + M_-)^{-1} {}^t F_-(y) & \text{si } y \leq x \end{cases}$$

On peut à présent définir la fonction w de Kotani. C'est cette fonction qui fera le lien entre les exposants de Lyapunov et la densité d'états intégrée. En effet, sa partie réelle sera (à la limite) la somme des N exposants de Lyapunov positifs, tandis que sa partie imaginaire sera (toujours à la limite) égale à $\pi N(E)$.

Définition 8.2.9. *Soit $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$. On définit la fonction w de Kotani par :*

$$w(E) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(\text{Tr}(M_+(E) + M_-(E))).$$

La fonction w à les propriétés suivantes :

Proposition 8.2.10. *Pour $E \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$:*

1. $w(E) = \mathbb{E}(\text{Tr}(M_+(E))) = \mathbb{E}(\text{Tr}(M_-(E)))$.
2. $\frac{d}{dE} w(E) = \mathbb{E}(\text{Tr}(G_E(0, 0, \omega)))$.
3. $-\text{Re } w(E) = (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)$.
4. $\mathbb{E}(\text{Tr}(\text{Im } M_\pm(E, \omega)^{-1})) = -\frac{2\text{Re } w(E)}{\text{Im } E} = \frac{2(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)}{\text{Im } E}$.

Dans le point 3, précisons que la formule :

$$\gamma_1(E) + \dots + \gamma_N(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log \|\wedge^N (A_{n-1}^\omega(E) \dots A_0^\omega(E))\|)$$

a un sens pour tout $E \in \mathbb{C}$.

On peut alors utiliser des résultats d'analyse harmonique valables pour des opérateurs de Schrödinger à valeurs matricielles. On introduit tout d'abord l'espace des fonctions de Herglotz :

$$\mathcal{H} = \{h \mid h \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}_+ \text{ et } h : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+\}.$$

On considère alors le sous-espace de \mathcal{H} :

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{H} \mid w, w', -iw \in \mathcal{H}\}.$$

Proposition 8.2.11. *La fonction de Kotani w est dans \mathcal{W} .*

Démonstration : Tout d'abord, puisque $H_A(\omega)$ est auto-adjoint, son spectre est inclus dans \mathbb{R} et $E \mapsto M_+(E)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Il en est alors de même pour $E \mapsto \text{Tr}(M_+(E))$. Or, si $\text{Im}E > 0$, on a :

$$\text{Im} M_+(E) = (\text{Im}E) \int_0^{+\infty} F_+(x, E)^* F_+(x, E) > 0.$$

Ainsi, $E \mapsto \text{Tr}(M_+(E))$ est dans \mathcal{H} et $w \in \mathcal{H}$.

Ensuite, par le point 2 de la proposition 8.2.10, $w'(E) = \mathbb{E}(\text{Tr}(G_E(0, 0, \omega)))$. Or, $G_E(0, 0, \omega)$ est holomorphe hors du spectre de $H_A(\omega)$ donc $\text{Tr}(G_E(0, 0, \omega))$ l'est aussi. Si $\text{Im}E > 0$, l'opérateur $\text{Im}(H_A(\omega) - E)^{-1}$ est défini positif et $\text{Im}\text{Tr}(G_E(0, 0, \omega)) > 0$. Alors, $\text{Im} w'(E) = \text{Im}\text{Tr}(G_E(0, 0, \omega)) > 0$ et $w' \in \mathcal{H}$.

Finalement, $-iw$ est holomorphe sur \mathbb{C}_+ puisque w l'est. Si $E \in \mathbb{C}_+$:

$$\text{Im}(-iw(E)) = -\text{Re} w(E) = (\text{Im}E)\mathbb{E}(\text{Tr}(\text{Im} M_+(E, \omega)^{-1}))$$

par le point 4 de la proposition 8.2.10. Or, si $E \in \mathbb{C}_+$, $\text{Tr}(\text{Im} M_+(E, \omega)^{-1}) > 0$ et $\text{Im}(-iw(E)) > 0$. Ainsi, $-iw \in \mathcal{H}$. □

8.2.3 Formule de Thouless

Soit n la mesure définie dans la proposition 8.2.3.

Proposition 8.2.12.

$$\forall E \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mathbb{E}(\text{Tr} G_E(0, 0, \omega)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dn(E')}{E' - E}. \quad (8.21)$$

Démonstration : Puisque \mathbb{R} est réunion dénombrable de boréliens bornés et que la distribution de Dirac en 0, δ_0 , peut être approchée par des fonctions continues à support compact, positives et de norme L^2 égale à 1, en utilisant la proposition (8.2.12), on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dn(E')}{E' - E} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E' - E} d\mathbb{E} \left(\text{Tr}(\langle \delta_0, E_{H_A(\omega)}((-\infty, E'])\delta_0 \rangle) \right).$$

Alors, par le théorème spectral,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{dn(E')}{E' - E} &= \mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E' - E} d \langle \delta_0, E_{H_A(\omega)}((-\infty, E'])\delta_0 \rangle \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\text{Tr}(\langle \delta_0, \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{E' - E} dE_{H_A(\omega)}((-\infty, E']) \right) \delta_0 \rangle) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\text{Tr}(\langle \delta_0, (H_A(\omega) - E)^{-1} \delta_0 \rangle) \right) \\ &= \mathbb{E}(\text{Tr}(G_E(0, 0, \omega))). \end{aligned}$$

□

On déduit de cette formule le lien entre la partie imaginaire de w et $E \mapsto N(E)$.

Proposition 8.2.13.

$$\forall E \in \mathbb{R}, \lim_{a \rightarrow 0^+} \text{Im} w(E + ia) = \pi N(E). \quad (8.22)$$

Démonstration : Tout d'abord, par le point 2 de la proposition 8.2.10 :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, w'(z) = \mathbb{E}(\text{Tr}(G_z(0,0,\omega))).$$

Alors, par la proposition 8.2.12 :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, w'(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dn(E')}{E' - z} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{N(E')}{(E' - z)^2} dE' \end{aligned}$$

en intégrant par parties. En intégrant cette expression, il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que :

$$w(z) = c + \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + E'z}{(E' - z)(1 + E'^2)} N(E') dE'. \quad (8.23)$$

Or, si $z \in \mathbb{R}$ n'est pas dans le spectre de $H_A(\omega)$ alors $w(z) \in \mathbb{R}$ (voir Carmona Saint-Flour, lemma 5.10, p84). On doit donc avoir $c \in \mathbb{R}$. Alors, en prenant la partie imaginaire dans (8.23) et en écrivant pour $z \in \mathbb{C}_+, z = E + ia, E \in \mathbb{R}, a > 0$:

$$\begin{aligned} \text{Im } w(E + ia) &= a \int_{\mathbb{R}} \frac{N(E')}{(E' - E)^2 + a^2} dE' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{N(E + au)}{1 + u^2} du \end{aligned}$$

où $u = \frac{E' - E}{a}$. Or $N(E)$ étant une fonction de répartition, elle est continue à droite et :

$$\forall E \in \mathbb{R}, \lim_{a \rightarrow 0^+} \text{Im } w(E + ia) = N(E) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + u^2} du = \pi N(E).$$

□

On a un résultat analogue pour la partie réelle de $w(E)$.

Proposition 8.2.14. *Pour Lebesgue-presque tout E dans \mathbb{R} , on a :*

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \text{Re } w(E + ia) = -(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E). \quad (8.24)$$

De plus, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle sur lequel $E \mapsto -(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)$ est continue, alors (8.24) est vraie pour tout $E \in I$.

Démonstration : Tout d'abord, par le point 3 de la proposition 8.2.10, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \text{Re } w(z) = -(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(z). \quad (8.25)$$

La fonction $z \mapsto -(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(z)$ est sous-harmonique et pour presque tout $E \in \mathbb{R}$ la limite tangentielle existe :

$$\lim_{a \rightarrow 0} (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E + ia) = (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E). \quad (8.26)$$

Soit E un réel tel que (8.26) soit vraie. En posant $z = E + ia$ avec $a > 0$ dans (8.25) on obtient l'existence de la limite suivante :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \text{Re } w(E + ia) = -(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E). \quad (8.27)$$

De plus, si I est un intervalle sur lequel $E \mapsto (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)$ est continue, la relation (8.27) est vraie pour tout E dans I puisqu'elle l'est pour presque tout $E \in I$.

□

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour démontrer une formule de Thouless adaptée au cas des opérateurs de Schrödinger aléatoires continus à valeurs matricielles. Puisque $(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)$ et $N(E)$ sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction w qui est dans l'espace \mathcal{W} , l'analyse harmonique développée pour cet espace par Kotani nous donne que ces deux fonctions sont liées par une relation intégrale.

Théorème 8.2.15 (Thouless formula). *Pour Lebesgue-presque tout $E \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E) = -\alpha + \int_{\mathbb{R}} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}n(E') \quad (8.28)$$

où α est un nombre réel indépendant de E et n est la mesure dont la densité d'états intégrée est la fonction de répartition. De plus, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle sur lequel $E \mapsto -(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)$ est continue, alors (8.28) est vraie pour tout $E \in I$.

Démonstration : Comme $w \in \mathcal{W}$, par les résultats de Kotani, et en utilisant aussi la proposition 8.2.13,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, w(z) = w(i) + \int_{\mathbb{R}} \log \left(\frac{E' - i}{E' - z} \right) \mathrm{d}n(E'). \quad (8.29)$$

Alors :

$$\mathrm{Re} w(z) = \mathrm{Re} w(i) + \int_{\mathbb{R}} \log \left(\left| \frac{E' - i}{E' - z} \right| \right) \mathrm{d}n(E'). \quad (8.30)$$

Soit $z = E + ia$ avec $E \in \mathbb{R}$ tel que (8.24) soit vraie et $a > 0$. Alors, lorsque a tend vers 0, par la proposition 8.2.14,

$$-(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E) = \mathrm{Re} w(i) + \int_{\mathbb{R}} \log \left(\left| \frac{E' - i}{E' - E} \right| \right) \mathrm{d}n(E'). \quad (8.31)$$

En posant $\alpha = \mathrm{Re} w(i)$ on obtient (8.28) pour tout E dans \mathbb{R} tel que (8.24) soit vérifiée, i.e pour Lebesgue-presque tout E dans \mathbb{R} . Enfin, si I est un intervalle sur lequel $E \mapsto (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)$ est continue, par la proposition 8.2.14, (8.28) est vraie pour tout E dans I .

□

On peut alors utiliser cette formule de Thouless pour démontrer que la fonction $E \mapsto N(E)$ a la même régularité que les exposants de Lyapounov.

8.2.4 Régularité Höldérienne

On commence par quelques rappels sur la transformée de Hilbert et sur ses principales propriétés.

Définition 8.2.16. *Si $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Hilbert est la fonction définie sur \mathbb{R} par :*

$$(T\psi)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \varepsilon} \frac{\psi(t)}{x-t} \mathrm{d}t.$$

Proposition 8.2.17. *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.*

1. $T^2\psi(x) = -\psi(x)$ pour Lebesgue-presque tout x dans \mathbb{R} .

2. Si ψ est höldérienne sur l'intervalle $[x_0 - a, x_0 + a]$, $a > 0$, alors $T\psi$ est höldérienne sur l'intervalle $[x_0 - \frac{a}{2}, x_0 + \frac{a}{2}]$.

On déduit de ces propriétés le résultat de régularité suivant.

Théorème 8.2.18. Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} et soit \tilde{I} un intervalle ouvert contenant I . On suppose que le potentiel V_ω dans $H_A(\omega)$ pour $d = 1$ et $N \geq 1$ est tel que le groupe de Fürstenberg G_{μ_E} de $H_A(\omega)$ est p -contractant et L_p -fortement irréductible pour tout $p \in \{1, \dots, N\}$ et tout $E \in \tilde{I}$. Alors la densité d'états intégrée associée à $H_A(\omega)$ est höldérienne sur I .

Démonstration : Tout d'abord, l'application $E' \mapsto \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right)$ est n -intégrable sur \mathbb{R} . En effet, le terme de renormalisation $E' - i$ au dénominateur contrebalance le fait que le support de n est non-compact. Ainsi, on a :

$$\forall E \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{E-\varepsilon}^{E+\varepsilon} \left| \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \right| \mathrm{d}n(E') = 0 \quad (8.32)$$

dont on déduit :

$$\forall E \in \mathbb{R}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} |\log(\varepsilon)| (N(E + \varepsilon) - N(E - \varepsilon)) = 0. \quad (8.33)$$

Cela implique que $E \mapsto N(E)$ est continue sur \mathbb{R} . Soit $E_0 \in I$ fixé et soit $a > 0$ tel que $[E_0 - 4a, E_0 + 4a] \subset \tilde{I}$. Par le théorème 8.2.15, pour $E \in]E_0 - 4a, E_0 + 4a[$:

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E) + \alpha - \int_{|E' - E_0| > 4a} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}n(E') = \int_{E_0 - 4a}^{E_0 + 4a} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}n(E').$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{E_0 - 4a}^{E_0 + 4a} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}n(E') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{E_0 - 4a}^{E - \varepsilon} \log |E' - E| \mathrm{d}n(E') \right. \\ &\quad \left. + \int_{E + \varepsilon}^{E_0 + 4a} \log |E' - E| \mathrm{d}n(E') \right) - \frac{1}{2} \int_{E_0 - 4a}^{E_0 + 4a} \log(1 + (E')^2) \mathrm{d}n(E'). \end{aligned}$$

On pose :

$$\mathcal{I}(E_0) = \frac{1}{2} \int_{E_0 - 4a}^{E_0 + 4a} \log(1 + (E')^2) \mathrm{d}n(E').$$

Alors, en intégrant par parties les deux premières intégrales,

$$\begin{aligned} &\int_{E_0 - 4a}^{E_0 + 4a} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}n(E') \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[[N(E') \log |E' - E|]_{E_0 - 4a}^{E - \varepsilon} - \int_{E_0 - 4a}^{E - \varepsilon} \frac{N(E')}{E' - E} dE' + [N(E') \log |E' - E|]_{E + \varepsilon}^{E_0 + 4a} \right. \\ &\quad \left. - \int_{E + \varepsilon}^{E_0 + 4a} \frac{N(E')}{E' - E} dE' \right] - \mathcal{I}(E_0). \end{aligned}$$

On pose $\psi(E) = N(E) \chi_{\{|E - E_0| \leq 4a\}} \in L^2(\mathbb{R})$. Par définition de la transformée de Hilbert :

$$\int_{E_0 - 4a}^{E_0 + 4a} \log |E' - E| \mathrm{d}n(E')$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi(T\psi)(E) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [(N(E - \varepsilon) - N(E + \varepsilon)) \log \varepsilon + N(E_0 + 4a) \log |E_0 - E + 4a| \\
 &\quad - N(E_0 - 4a) \log |E_0 - E - 4a|] - \mathcal{I}(E_0) \\
 &= \pi(T\psi)(E) + N(E_0 + 4a) \log |E_0 - E + 4a| - N(E_0 - 4a) \log |E_0 - E - 4a| - \mathcal{I}(E_0)
 \end{aligned}$$

par (8.33). Finalement :

$$\begin{aligned}
 \pi(T\psi)(E) &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E) + \alpha - \int_{|E' - E_0| > 4a} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') - \\
 &\quad N(E_0 + 4a) \log |E_0 - E + 4a| + N(E_0 - 4a) \log |E_0 - E - 4a| + \mathcal{I}(E_0) \\
 &= (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E) + \alpha - \int_{|E' - E_0| \geq 4a} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}\mathfrak{n}(E') + \mathcal{I}(E_0).
 \end{aligned}$$

Puisque $[E_0 - 4a, E_0 + 4a] \subset I \subset \tilde{I}$, $E \mapsto (\gamma_1 + \dots + \gamma_N)(E)$ est höldérienne $[E_0 - 4a, E_0 + 4a]$ d'après le théorème 8.1.16. De plus, $E \mapsto \int_{|E' - E_0| \geq 4a} \log \left(\left| \frac{E' - E}{E' - i} \right| \right) \mathrm{d}\mathfrak{n}(E')$ est höldérienne d'ordre 1 sur l'intervalle $]E_0 - 4a, E_0 + 4a[$.

Ainsi $T\psi$ est höldérienne sur tout intervalle compact inclus dans $]E_0 - 4a, E_0 + 4a[$, en particulier sur $[E_0 - 2a, E_0 + 2a]$. Par le point 2 de la proposition 8.2.17, $T^2\psi$ is höldérienne sur $[E_0 - a, E_0 + a]$. Or, par le point 1 de la proposition 8.2.17 et par continuité de $E \mapsto N(E)$ (par (8.33)),

$$\forall E \in [E_0 - a, E_0 + a], (T^2\psi)(E) = -N(E).$$

Ainsi $E \mapsto N(E)$ est höldérienne sur $[E_0 - a, E_0 + a]$. Or I est compact, il peut donc être recouvert par un nombre fini d'intervalles $]E_0 - a, E_0 + a[\subset \tilde{I}$ avec $E_0 \in I$. Donc, $E \mapsto N(E)$ est höldérienne sur I .

□

Chapitre 9

Localisation d'Anderson en dimension 1

9.1 Définitions mathématiques de la localisation

Il y a plusieurs définitions mathématiques pour traduire le phénomène de localisation d'Anderson. Dans toute la suite, (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace de probabilité complet.

Définition 9.1.1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que la famille d'opérateurs aléatoires auto-adjoints $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ est **spectralement localisée dans** I lorsque le spectre de H_ω dans I est non vide et purement ponctuel pour P -presque tout $\omega \in \Omega$.

Définition 9.1.2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que la famille d'opérateurs aléatoires auto-adjoints $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ a la propriété de **localisation d'Anderson dans** I ou encore est **exponentiellement localisée** lorsque :

1. le spectre de H_ω dans I est non vide et purement ponctuel pour P -presque tout $\omega \in \Omega$,
2. les fonctions propres (généralisées) associées aux valeurs propres (généralisées) dans I décroissent exponentiellement vers 0 à l'infini.

C'est cette seconde définition sur laquelle nous baserons notre intuition et notre analyse dans la suite de ce cours.

Définition 9.1.3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit que la famille d'opérateurs aléatoires auto-adjoints $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ sur \mathcal{H} est **dynamiquement localisée dans** I lorsque :

1. le spectre de H_ω dans I est non vide pour P -presque tout $\omega \in \Omega$,
2. pour tout intervalle compact $I_0 \subset I$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\forall n \geq 0, \mathbb{E} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| (1 + |x|^2)^{\frac{n}{2}} e^{-itH_\omega} \mathbf{1}_{I_0}(H_\omega) \psi \right\|^2 \right) < +\infty.$$

Cette définition est de nature dynamique et suit l'évolution des paquets d'ondes au cours du temps. Cela nous dit que la particule reste au voisinage de sa position initiale uniformément au cours du temps.

Pour comprendre l'évolution de l'électron dans le cristal on regarde en fait la quantité :

$$(r(t))^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |x\psi(t, x)|^2 dx.$$

Si elle diverge, cela signifie que x part à l'infini, si elle converge cela signifie que x reste borné. Il peut y avoir plusieurs comportements pour cette quantité. Parmi ceux-ci on retient le comportement ballistique où $(r(t))^2 \sim t^2$ qui correspond à un milieu conducteur, l'électron se comporte comme un point mobile. Lorsque $(r(t))^2$ est bornée, on parle d'état localisé.

La question de l'étude du spectre pour le modèle d'Anderson n'est pas aisée. En effet, si le laplacien a un spectre purement absolument continu, l'opérateur de multiplication par V_ω est (dans le cas discret) une matrice aléatoire diagonale et son spectre est donc discret. Les deux effets se contrebalancent lorsque l'on regarde le spectre de la somme de ces deux opérateurs. De nombreux résultats mathématiques sont de nature perturbative et incluent un coefficient devant le terme V_ω . Lorsque ce paramètre est grand, le potentiel aléatoire l'emporte sur le laplacien et a priori il y aura localisation. Lorsque ce paramètre est petit, c'est l'inverse. Intuitivement, plus le désordre est grand, plus il y a de chance de voir apparaître des états localisés.

Ce qui est surprenant, c'est qu'en dimension 1, même un tout petit terme aléatoire va entraîner la localisation d'Anderson. L'idée est qu'en dimension 1, il n'y a pas la "place" pour contourner une impureté dans le cristal alors qu'en dimension supérieure si.

En général, il y aura localisation au bas du spectre ou au bord des bandes spectrales lorsqu'il y a un spectre de bandes (par exemple dans le cas discret avec un support de loi commune finie, on a alors un nombre fini de translatés de $[0, 4d]$). À l'intérieur des bandes par contre, il y aura du spectre absolument continu et donc de la diffusion pour $d \geq 3$. En dimension 2 on pense qu'il y a localisation partout comme en dimension 1 (sauf éventuellement dans un ensemble discret d'énergies).

Enfin, une autre interprétation de la localisation d'Anderson tient au fait qu'elle décrit l'absence d'effet tunnel entre deux valeurs propres.

9.2 Localisation pour les modèles d'Anderson quasi-unidimensionnels

Dans la suite, nous allons présenter un critère de localisation pour des opérateurs de la forme :

$$H(\omega) = -\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N + \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x - \ell n), \quad (9.1)$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$, où $N \geq 1$ est un entier, I_N est la matrice identité d'ordre N et $\ell > 0$ est un nombre réel. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité complet et soit $\omega \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $x \mapsto V_\omega^{(n)}(x)$ sont à valeurs dans l'espace des matrices réelles symétriques, à support dans $[0, \ell]$ et uniformément bornées en x, n et ω . La suite $(V_\omega^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires *i.i.d.* sur Ω . On suppose aussi que le potentiel $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} V_\omega^{(n)}(x - \ell n)$ est tel que l'opérateur $H(\omega)$ soit \mathbb{Z} -ergodique.

Comme perturbation bornée de $-\frac{d^2}{dx^2} \otimes I_N$, l'opérateur $H(\omega)$ est auto-adjoint sur l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$ et ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, le spectre de $H(\omega)$ est inclus dans \mathbb{R} .

Par \mathbb{Z} -ergodicité, il existe $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tel que pour P -presque tout $\omega \in \Omega$, $\Sigma = \sigma(H(\omega))$. Il existe aussi Σ_{pp} , Σ_{ac} et Σ_{sc} , sous-ensembles de \mathbb{R} , tels que, pour P -presque tout $\omega \in \Omega$, $\Sigma_{pp} = \sigma_{pp}(H(\omega))$, $\Sigma_{ac} = \sigma_{ac}(H(\omega))$ et $\Sigma_{sc} = \sigma_{sc}(H(\omega))$.

Nous allons montrer que sous certaines hypothèses portant sur le groupe de Fürstenberg de $H(\omega)$, cet opérateur va présenter de la localisation d'Anderson sur un certain intervalle de \mathbb{R} .

Pour $E \in \mathbb{R}$, soit $G(E)$ le groupe de Fürstenberg de $H(\omega)$.

Théorème 9.2.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact tel que $\Sigma \cap I \neq \emptyset$ et soit \tilde{I} un intervalle ouvert contenant I et tel que pour tout $E \in \tilde{I}$, $G(E)$ est p -contractant et L_p -fortement irréductible. Alors, $H(\omega)$ a la propriété de localisation d'Anderson et est dynamiquement localisé sur I .

En dimension 1, pour démontrer un théorème tel que le théorème 9.2.1, on peut suivre le plan suivant :

1. On montre que les exposants de Lyapounov de $H(\omega)$ sont séparés.
2. On démontre la régularité höldérienne de ces exposants.
3. On en déduit la même régularité pour la densité d'états intégrée.
4. De là, on en déduit une estimée de Wegner.
5. On peut alors appliquer un schéma d'analyse multi-échelle.

La régularité höldérienne de la densité d'états intégrée est un ingrédient clé dans la preuve d'une estimée de Wegner adaptée aux cas des opérateurs dont l'alea peut être singulier comme $H(\omega)$. Soit $L \in \mathbb{N}^*$ et soit $H^{(L)}(\omega)$ la restriction de $H(\omega)$ à $L^2([-L, L]) \otimes \mathbb{C}^N$ avec conditions de Dirichlet aux bords.

Théorème 9.2.2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact et \tilde{I} un intervalle ouvert, $I \subset \tilde{I}$, tel que, pour tout $E \in \tilde{I}$, $G(E)$ est p -contractant et L_p -fortement irréductible. Alors, pour tout $\beta \in (0, 1)$ et tout $\kappa > 0$, il existe $L_0 \in \mathbb{N}$ et $\xi > 0$ tels que,

$$(W) \quad \mathbb{P} \left(d \left(E, \sigma(H^{(L)}(\omega)) \right) \leq e^{-\kappa(\ell L)^\beta} \right) \leq e^{-\xi(\ell L)^\beta}, \quad (9.2)$$

pour tout $E \in I$ et tout $L \geq L_0$.

On peut comparer cet énoncé avec des estimées de Wegner classiques, valables pour des opérateurs dont l'alea est régulier, mettant en jeu des variables aléatoires à densités.

Par exemple, on peut démontrer pour un opérateur d'Anderson h_ω discret et scalaire avec des variables aléatoires à densité une estimée de Wegner optimale :

$$\mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(\mathbf{1}_I \left(h_\omega^\Lambda \right) \right) \right) \leq C_W \cdot |I| \cdot |\Lambda| \quad (9.3)$$

avec $C_W > 0$, $|I|$ qui est la longueur de l'intervalle I et $|\Lambda|$ est le volume du cube Λ auquel on a restreint h_ω pour définir h_ω^Λ .

On peut aussi obtenir une estimée de Wegner améliorée,

$$\mathbb{E} \left(\text{Tr} \left(\mathbf{1}_I \left(h_\omega^\Lambda \right) \right) \right) \leq C_W \cdot N(I) \cdot |\Lambda| \quad (9.4)$$

où $N(\cdot)$ est la densité d'états intégrée associée à h_ω .

9.3 Un tour rapide de l'analyse multi-échelle

On commence par énoncer une propriété qui assure l'existence de fonctions propres généralisées en un sens à préciser pour $H(\omega)$. Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^N$, et soit $\nu > \frac{1}{4}$. On définit les espaces à poids \mathcal{H}_\pm par :

$$\mathcal{H}_\pm = L^2(\mathbb{R}, \langle x \rangle^{\pm 4\nu} dx) \otimes \mathbb{C}^N,$$

où $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_-$ la forme sesquilinéaire

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-}$ par :

$$\forall (\phi, \psi) \in \mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_-, \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-} = \int_{\mathbb{R}} {}^t \phi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

Soit aussi T l'opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} donné par la multiplication par $\langle x \rangle^{2\nu}$. On rappelle que $E_\omega(\cdot)$ désigne le projecteur spectral de $H(\omega)$ et on définit la propriété de "Strong Generalized Eigenfunction Expansion".

Définition 9.3.1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On dit que $H(\omega)$ vérifie la propriété (SGEE) sur I si, pour un $\nu > \frac{1}{4}$,

- (i) pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\mathcal{D}_+(\omega) = \{\phi \in D(H(\omega)) \cap \mathcal{H}_+ \mid H(\omega)\phi \in \mathcal{H}_+\}$ est dense dans \mathcal{H}_+ et est un coeur pour $H(\omega)$,
- (ii) il existe une fonction f continue et bornée sur \mathbb{R} , strictement positive sur $\sigma(H(\omega))$ telle que :

$$\mathbb{E} \left(\left(\text{tr}_{\mathcal{H}}(T^{-1}f(H(\omega))E_\omega(I)T^{-1}) \right)^2 \right) < \infty.$$

Définition 9.3.2. Une fonction mesurable $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$ est une fonction propre généralisée pour $H(\omega)$ associée à la valeur propre généralisée λ si $\psi \in \mathcal{H}_- \setminus \{0\}$ et :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}_+(\omega), \langle H(\omega)\phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-} = \bar{\lambda} \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-}.$$

On introduit des notations pour les restrictions de $H(\omega)$ à des intervalles de longueur finie \mathbb{R} non nécessairement centrés en 0. Pour $x \in \mathbb{Z}$ et $L \geq 1$, soit $I_L(x) = [x - \ell L, x + \ell L]$, centré en x et de longueur $2\ell L$. Soit $\mathbf{1}_{x,L}$ la fonction caractéristique de $I_L(x)$ et soit $\mathbf{1}_x$, la fonction caractéristique de $I_1(x)$. Pour $L \in 3\mathbb{N}^*$, on pose aussi,

$$\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} = \mathbf{1}_{x,L} - \mathbf{1}_{x,L-2} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{x,L}^{\text{in}} = \mathbf{1}_{x, \frac{L}{3}}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $L \geq 1$, soit $H^{(x,L)}(\omega)$ la restriction de $H(\omega)$ à $L^2(I_L(x)) \otimes \mathbb{C}^N$ avec conditions de Dirichlet aux bords et, pour $E \notin \sigma(H^{(x,L)}(\omega))$, soit $R^{(x,L)}(E)$ la résolvante de $H^{(x,L)}(\omega)$ en E , $R^{(x,L)}(E) = (H^{(x,L)}(\omega) - E)^{-1}$. Soit enfin $E_\omega^{(x,L)}$ le projecteur spectral de $H^{(x,L)}(\omega)$. Avec toutes ces notations, on peut énoncer une inégalité de type Simon-Lieb.

Définition 9.3.3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On dit que $H(\omega)$ a la propriété (SLI) s'il existe une constante C_I telle que, étant donnés $L, L', L'' \in \mathbb{N}$ et $x, y, y' \in \mathbb{Z}$, avec $I_{L''}(y) \subset I_{L'-2}(y') \subset I_{L-2}(x)$, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, si $E \in I$, $E \notin \sigma(H^{(x,L)}(\omega)) \cup \sigma(H^{(y',L')}(y'))$, on a :

$$\|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_{y,L''}\| \leq C_I \|\mathbf{1}_{y',L'}^{\text{out}} R^{(y',L')}(E) \mathbf{1}_{y,L''}\| \|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_{y',L'}^{\text{out}}\|.$$

La propriété (SLI) permet d'estimer comment les résolvantes restreintes $R^{(x,L)}(E)$ varient en norme lorsque l'on passe d'un intervalle donné à un intervalle plus long le contenant. Ce type d'estimée est aussi appelée "Geometric Resolvent Inequality" dans la littérature. On peut maintenant énoncer une estimée pour les fonctions propres généralisées en terme de résolvantes restreintes appelée "Eigenfunction Decay Inequality".

Définition 9.3.4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On dit que $H(\omega)$ a la propriété (EDI) s'il existe une constante \tilde{C}_I telle que, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, étant donnée une valeur propre généralisée $E \in I$, on a pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $L \in \mathbb{N}$ avec $E \notin \sigma(H^{(x,L)}(\omega))$,

$$\|\mathbf{1}_x \psi\| \leq \tilde{C}_I \|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_x\| \|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} \psi\|.$$

La propriété suivante est une estimée du nombre moyen de valeurs propres de $H^{(x,L)}(\omega)$.

Définition 9.3.5. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On dit que $H(\omega)$ a la propriété (NE) s'il existe une constante finie \hat{C}_I telle que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $L \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E} \left(\text{tr}_{\mathcal{H}}(E_{\omega}^{(x,L)}(I)) \right) \leq \hat{C}_I \ell L.$$

La dernière propriété nécessaire à faire fonctionner l'analyse multi-échelle est d'une nature différente. Il s'agit d'une propriété probabiliste d'indépendance d'intervalles éloignés les uns des autres. Un événement $A \in \mathcal{A}$ est dit basé sur $I_L(x)$ s'il est déterminé par des conditions portant sur $H^{(x,L)}(\omega)$. Etant donné $d_0 > 0$, on dit que $I_L(x)$ et $I_{L'}(x')$ sont d_0 -non recouvrant si $d(I_L(x), I_{L'}(x')) > d_0$.

Définition 9.3.6. On dit que $H(\omega)$ a la propriété (IAD) s'il existe $d_0 > 0$ tel que tout couple d'évènements basés sur des intervalles d_0 -non recouvrant sont indépendants.

Avant de donner la définition de l'ensemble de l'analyse multi-échelle Σ_{MSA} , il nous faut une dernière définition.

Définition 9.3.7. Soient $\gamma, E \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \Omega$. Pour $x \in \mathbb{Z}$ et $L \in 3\mathbb{N}^*$, on dit que l'intervalle $I_L(x)$ est (ω, γ, E) -bon si $E \notin \sigma(H^{(x,L)}(\omega))$ et

$$\|\mathbf{1}_{x,L}^{\text{out}} R^{(x,L)}(E) \mathbf{1}_{x,L}^{\text{in}}\| \leq e^{-\gamma \ell^{\frac{L}{3}}}.$$

On suppose que $H(\omega)$ vérifie la propriété (IAD).

Définition 9.3.8. L'ensemble Σ_{MSA} pour $H(\omega)$ est l'ensemble des $E \in \Sigma$ pour lesquels il existe un intervalle ouvert I tel que $E \in I$ et, étant donné $\zeta, 0 < \zeta < 1$, et $\alpha_0 \in (1, \zeta^{-1})$, il existe une échelle de longueur $L_0 \in 6\mathbb{N}$ et un nombre réel $\gamma > 0$, tels que si on pose $L_{k+1} = \max\{L \in 6\mathbb{N} \mid L \leq L_k^{\alpha_0}\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\mathbb{P} \left(\{\omega \in \Omega \mid \forall E' \in I, I_L(x) \text{ ou } I_L(y) \text{ est } (\omega, \gamma, E') \text{ - bon} \} \right) \geq 1 - e^{-L_k^{\zeta}}.$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $|x - y| > L_k + d_0$.

On termine en donnant l'énoncé du théorème d'analyse mutli-échelle de Germinet et Klein pour les opérateurs mettant en jeu des mesures de probabilité singulières comme $H(\omega)$.

Théorème 9.3.9. Supposons que $H(\omega)$ a les propriétés (IAD), (SLI), (NE) et vérifie une estimée de Wegner (W) telle que (9.2) sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Etant donné $\gamma > 0$, pour tout $E \in I$, il existe un entier $L_{\gamma}(E)$, borné sur les sous-intervalles compact de I , tel que, pour $E_0 \in \Sigma \cap I$ donné, on a :

$$\mathbb{P} \left(\{\omega \in \Omega \mid I_{L_0}(0) \text{ est } (\omega, \gamma, E_0) \text{ - bon} \} \right) \geq 1 - e^{-\delta \ell L}, \quad (9.5)$$

pour $L_0 \in \mathbb{N}$, $L_0 > L_{\gamma}(E)$ et $\delta > 0$, alors $E_0 \in \Sigma_{\text{MSA}}$.

L'hypothèse (9.5) est aussi connue sous le nom d'estimée de pas initial ou encore "Initial Length Scale Estimate" (ILSE).

On peut finalement résumer les ingrédients d'une preuve par analyse multi-échelle de la localisation d'Anderson et dynamique :

$$\begin{array}{c} \underbrace{\text{(IAD)} + \text{(SLI)} + \text{(NE)} + \text{(W)} + \text{(ILSE)}}_{\downarrow} \\ \underbrace{\text{(MSA)} + \text{(SGEE)} + \text{(EDI)}}_{\downarrow} \\ \underbrace{\text{Localisation d'Anderson et dynamique}} \end{array} \quad (9.6)$$

