1

Feuille de TD3 :

Exercice 1 :

a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$. Alors $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = 0$ car $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_-^*$ implique que $\varphi(y) = 0$ pour $y \geq 0$.

Donc $(\operatorname{supp} T)^c \supset \mathbb{R}_-^*$ et $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta > 0$ et soit $V_\delta =]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Soit φ une fonction "pic", $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. En particulier, φ est strictement positive sur $V_{\delta'} =]x_0-\delta', x_0+\delta'[$ avec $0<\delta'<\delta$ et $V_{\delta'} \subset V_\delta$, $x_0 \in V_{\delta'}$. On a de plus :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = \int_{x^2 \in V_\delta} \varphi(x^2)\,dx = \int_{\sqrt{x_0-\delta}}^{\sqrt{x_0+\delta}} \varphi(x^2)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(y)\,dy \geq \int_{x_0-\delta'}^{x_0+\delta'} \varphi(y)\,dy > 0$$

Donc T est non nulle au voisinage de x_0. Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, on a $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$. Donc : $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

b. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}_-^*$, alors :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log x\,dx = 0 \quad \text{car } \varphi \equiv 0 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Donc $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(]x_0-\delta, x_0+\delta[)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Alors :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi'(x) \log x\,dx = -\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx < 0. \text{ Donc } \langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

Donc $x_0 \in \operatorname{supp} T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$. Donc $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

c. Soit D la courbe $D=\{(x,h(x)) \mid x\in\mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{supp} T = D$.

Tout d'abord, soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbb{R}^2\setminus D$. Alors $\varphi(x,h(x))=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $\langle T,\varphi\rangle=0$. Donc $D^c\subset(\operatorname{supp}T)^c$ et $\operatorname{supp}T\subset D$.

Réciproquement, montrons que tout point $M_0=(x_0,h(x_0))\in D$ est dans $\operatorname{supp}T$.

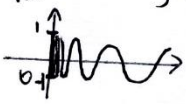
Soit $\delta>0$. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\operatorname{supp}\varphi\subset B(M_0,\delta)$ et $\varphi(x,y)=1$ pour tout $(x,y)\in B(M_0,\delta/2)$. Alors :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_{B(M_0,\delta)\cap\mathbb{R}}\varphi(x,h(x))\,dx\right| \geq \int_{B(M_0,\delta/2)\cap\mathbb{R}}\underbrace{\varphi(x,h(x))}_{=1}dx$$
$$\geq Leb(V)>0$$

où $V=\{x\in\mathbb{R} \mid (x,h(x))\in B(M_0,\delta/2)\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0, donc $M_0\in\operatorname{supp}T$.

Ainsi $D\subset\operatorname{supp}T$ et $D=\operatorname{supp}T$.

d. Montrons que si $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\sin\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0\right\}$, alors $\operatorname{supp}T=\overline{S}=S\cup(\{0\}\times[-1,1])$.



- Soit $x_0\notin\overline{S}$. Alors, il existe $\varepsilon>0$, $\overline{B}(x_0,\varepsilon)\subset\overline{S}^c$.

  Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\overline{B}(x_0,\varepsilon)$. Alors par définition de T, $\langle T,\varphi\rangle=0$ car : $\forall t>0$, $\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)\notin\overline{B}(x_0,\varepsilon)$ et $(0,\sin t)\notin\overline{B}(x_0,\varepsilon)$

  Donc $x_0\notin\operatorname{supp}T$ et $\operatorname{supp}T\subset\overline{S}$.

- Réciproquement, soit $x_0\in S$ et soit $\varepsilon>0$ tel que $B(x_0,\varepsilon)\cap(\{0\}\times[-1,1])=\emptyset$.

  Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi\subset B(x_0,\varepsilon)$, $\varphi=1$ sur $\overline{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi\geq 0$. Alors :

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)dt \geq t_2-t_1>0$$

  où t_1 est tel que $x_0=\left(\frac{1}{t_1^2},\sin t_1\right)$ et $t_2=\inf\left\{t>t_1,\ \left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)\notin\overline{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})\right\}$

  Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S\subset\operatorname{supp}T$. Comme $\operatorname{supp}T$ est fermé, $\overline{S}\subset\operatorname{supp}T$ et finalement, $\operatorname{supp}T=\overline{S}$.

Exercice 2:

1. Comme l'équation différentielle $2xu'-u=0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_1\sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_2\sqrt{x}$.

On note $x_+=\max(x,0)$ et $x_-=\max(-x,0)$.

Les fonctions localement intégrables $u : x \mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu'-u=0$.

2.a. Les distributions associées aux fonctions $u : x\mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT'-T=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT'-T=0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1=\frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

Alors : $S_1'=\frac{T_1'}{\sqrt{x}}-\frac{T_1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2xT_1'-T_1}{2x\sqrt{x}}=0$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (convexe), il existe $C_1\in\mathbb{R}$ telle que $S_1=C_1$. D'où $T_1=C_1\sqrt{x_+}$.

De même : $T_2=C_2\sqrt{x_-}$.

b. Soit $S=T-T_1-T_2$. Si $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,
$$\begin{aligned}\langle S,\varphi\rangle &= \langle T,\varphi\rangle-\langle T_1,\varphi\rangle-\langle T_2,\varphi\rangle\\ &=\langle T_1,\varphi\rangle-\langle T_1,\varphi\rangle-0\\ &=0\end{aligned}$$

Et si $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$,
$$\begin{aligned}\langle S,\varphi\rangle &= \langle T,\varphi\rangle-\langle T_1,\varphi\rangle-\langle T_2,\varphi\rangle\\ &=\langle T_2,\varphi\rangle-0-\langle T_2,\varphi\rangle\\ &=0.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{R}_+^*\subset(\operatorname{supp} S)^c$ et $\mathbb{R}_-^*\subset(\operatorname{supp} S)^c$, donc $\operatorname{supp} S\subset\mathbb{R}_-$ et $\operatorname{supp} S\subset\mathbb{R}_+$.

Donc : $\operatorname{supp} S\subset\{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R=0$ alors $2xR'-R=0$.

Réciproquement, supposons que $2xR'-R=0$ et montrons que $R=0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi \rangle &= -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)' \rangle \\
&= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi \rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi' \rangle \\
&= 2(-1)^{k+1} \left(2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0) \right) \\
&= 2(-1)^{k+1} (k+1) \varphi^{(k)}(0)
\end{aligned}$$

Donc $2xR'-R = \sum_{k=0}^{p} \left(2(-1)^{k+1}(k+1) - 1\right) a_k \delta^{(k)}$

Or $2xR'-R=0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R=0$.

d. Comme par b., $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT'-T=0$, alors S aussi et donc par c., $S=0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-}$ sont les solutions de $2xT'-T=0$.

2. La forme du second membre δ_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0\delta_0$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)(1)-1)a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT'-T=\delta_0$ sont les

$$C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-} - \frac{1}{3}\delta_0.$$

Exercice 3:

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle \delta_0' * \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi^\Delta(x+y) \rangle$

$$= \langle \delta_0', -\langle \delta_0, \partial_y \varphi^\Delta(x,y) \rangle \rangle$$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$.

$$= \langle \delta_0', -\varphi'(x) \rangle$$

$$= \varphi''(0).$$

Donc $\delta_0' * \delta_0' = \delta_0''$.

On peut aussi dériver l'égalité : $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, deux fois.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note φ_x la fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. On a :

$$\langle \delta_a' \otimes \delta_b', \varphi \rangle = \langle \delta_a', \langle \delta_b', \varphi_x \rangle \rangle = \langle \delta_a', -\varphi_x'(b) \rangle$$

$$= \langle \delta_a', -\partial_y \varphi(x,b) \rangle = \partial_x \partial_y \varphi(a,b).$$

3. $E = \delta_0^{(k)}$ convient. En effet si on dérive k fois l'identité $\delta_0 * T = T$ on obtient

$$\delta_0^{(k)} * T = T^{(k)}.$$

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle X^m (T*S), \varphi \rangle = \langle T*S, X^m \varphi \rangle = \langle T \otimes S, (x+y)^m \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle T \otimes S, x^k y^{m-k} \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k \langle (x^k T) \otimes (y^{m-k} S), \varphi^\Delta(x,y) \rangle = \langle \sum_{k=0}^{m} C_m^k (X^k T) * (X^{m-k} S), \varphi \rangle$$

Exercice 4 :

On a : $\delta_0' * 1 = (\delta_0 * 1)' = 1' = 0$

et $\delta_0' * H = (\delta_0 * H)' = H' = \delta_0$.

D'où : $(1 * \delta_0') * H = (\delta_0' * 1) * H = 0 * H = 0$

et $1 * (\delta_0' * H) = 1 * \delta_0 = 1$.

Donc l'associativité n'est pas vérifiée dans cet exemple car $(1 * \delta_0') * H \neq 1 * (\delta_0' * H)$.

Cela vient du fait que seule δ_0' est à support compact, 1 et H ne le sont pas.

Exercice 5 - Equation de la chaleur

1. On a, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $t>0$ et $x \in \mathbb{R}$:

On a : $$\partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}}\right] e^{-x^2/4t}$$

et $$\partial^2_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}\right) = \partial_x\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{2x}{4t}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\partial_x\left(\frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}}\left(-\frac{x}{2t}\right) e^{-x^2/4t}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}}\right] e^{-x^2/4t}$$
$$= \partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

3. a. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$.

On a : $$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\, \partial_t \varphi(x,t)\, dt\, dx$$

IPP $\rightarrow$ $$= -\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\, dt\, dx$$

par 2. $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \partial^2_{xx}\left(\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\, dt\, dx$$

$2\times$ IPP + Fubini $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\, \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\, dt\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx - J_\varepsilon.$$

Donc : $$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx.$$

b. On pose $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $dx = \sqrt{\varepsilon}\, dy$.

Alors : $$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)\, dy$$

Or, par convergence dominée, comme $e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-y^2/4}\varphi(0,0)$,

et $|e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\, dy = \varphi(0,0).$$

4. On a, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
\langle (\partial_t - \partial^2_{xx})E, \varphi \rangle &= -\langle E, \partial_t\varphi + \partial^2_{xx}\varphi \rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\partial_t \varphi(x,t) + \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\right) dx\, dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\partial_t\varphi(x,t) + \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\right) dx\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(I_\varepsilon + J_\varepsilon\right) = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

par convergence dominée. En effet :

$$\left| \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \right| \leq \frac{\partial_t\varphi(x,t)}{\sqrt{4\pi t}} H(t) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$$

et quand $\varepsilon \to 0$, $\mathbb{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(t) \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t) \longrightarrow \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)$

et donc $I_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t)\, dx\, dt$.

De même : $J_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\, dx\, dt$.

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{(\partial_t - \partial^2_{xx})E = \delta_0}$

5. Comme $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} f\}$ est convolutive, $E * f$ converge.

6. Comme $E \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ alors $u \in C^\infty(\Omega)$ avec $u = E * f$.