Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS
Année universitaire 2018-2019

# Examen de Distributions

**Le 29 octobre 2018**

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.

**Exercice 1. (Compétences de bases).**

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donner la définition d'une distribution d'ordre au plus $m$ sur $\Omega$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 5 & \text{si} \quad x \in ]-2, 0] \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

   (a) Justifier que la fonction $f$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $T_f$ la distribution associée à $f$.

   (b) Calculer la dérivée de $T_f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $f_n$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $T_{f_n}$ la distribution associée à $f_n$.

   (b) Montrer que $(T_{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et déterminer sa limite.

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

   (a) Justifier que la fonction $f$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $T_f$ la distribution associée à $f$.

   (b) Déterminer le support de $T_f$.

5. Soit $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

   (a) Rappeler, sans démonstration, quelle est la forme d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xT = 0$.

   (b) Montrer que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $xT = 1$.

**Exercice 2. (Compétences attendues).** Soit $T$ l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ < T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x)\, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
2. Montrer que le support de $T$ est inclus dans $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$.
3. Montrer que supp $T = D$.

   *Indication : pour chaque point du plan de coordonnées $(x_0, -x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, on pourra considérer une fonction plateau au voisinage de ce point.*
4. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que $T$ soit la distribution associée à cette fonction.
5. Calculer, au sens des distributions, $\partial_x T - \partial_y T$.

**Exercice 3. (Compétences attendues).** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Une série de distributions $\sum T_n$ est dite convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque la suite des sommes partielles l'est.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(]0, +\infty[)$.
2. Montrer que si la série $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors la série numérique $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
3. On suppose désormais que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. On pose pour tout $N \geq 1$, $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ et $A_0 = 0$, de telle manière que $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
   (a) Montrer que si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ alors la série numérique

   $$\sum_{n\geq 1} A_n \left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

   converge.

   (b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.