Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS
Année universitaire 2018-2019

Examen de Distributions

Le 10 janvier 2019

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donner la définition d'une distribution d'ordre au plus m sur Ω.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$
   (a) Justifier que la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note T_f la distribution associée à f.
   (b) Calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Pour $n \geq 1$, on considère la distribution $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par
$$T_n = \sqrt{n}\left(\delta_{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \delta_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$$
   où pour tout réel a, δ_a désigne la distribution de Dirac en a.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.

4. (a) Justifier que la distribution associée à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(2x)$, est tempérée.
   (b) Déterminer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la distribution associée à la fonction $x \mapsto \cos(2x)$.

5. Soient f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On note $\tau_a f$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par : $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$. On note T_f la distribution associée à f. Montrez que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,
$$\delta_a \star T_f = T_{\tau_a f}.$$

Exercice 2. (Compétences attendues).

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x).$$

2. En déduire l'existence de la limite :
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\log(\varepsilon)\right) :=< \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi > .$$

3. Justifier que la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) : \varphi \mapsto < \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi >$ est une distribution d'ordre au plus 2 sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer le support de $\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$.

5. Pour tout $n \geq 1$, soit φ_n une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, telle que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, supp $\varphi_n \subset [\frac{1}{2n}, 2]$ et φ_n est égale à 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$. En minorant $< \mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi_n >$, montrez que $\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ n'est pas une distribution d'ordre 0.

6. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de la limite :
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x + \varphi(0) \log(\varepsilon) \right) :=< \mathrm{vp}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi > .$$

7. Justifier que la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{vp}\left(\frac{H}{x}\right) : \varphi \mapsto < \mathrm{vp}\left(\frac{H}{x}\right), \varphi >$ est une distribution d'ordre au plus 1 sur $\mathbb{R}$.

8. Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,
$$\mathrm{vp}\left(\frac{H}{x}\right)' = -\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) - \delta_0'.$$

9. (*) On considère pour tout $n \geq 1$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_n(x) = \left(\int_0^x \varphi_n(t)\mathrm{d}t\right) \chi(x)$ où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction à support dans $[-1, 3]$, identiquement égale à 1 sur $[0, 2]$ et telle que $0 \leq \chi \leq 1$.

   En utilisant la suite $(\psi_n)_{n \geq 1}$, montrez que $\mathrm{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ est une distribution d'ordre 2.

Exercice 3. (Compétences attendues).

1. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

2. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $y' + y = \delta_0$ où $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ désigne la distribution de Dirac en 0.

3. Montrer qu'il existe une unique distribution tempérée $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que l'on déterminera explicitement, solution de l'équation différentielle $y' + y = \delta_0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une unique distribution tempérée $u_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle
$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' + u_\varepsilon = \delta_0.$$

5. Montrer que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge vers u_0 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives.

Exercice 4. (Compétences attendues). On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction localement intégrable :
$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t - |x| \leq 0 \end{cases} .$$

1. Calculer $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ une solution de l'équation aux dérivées partielles :
$$\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f,$$
   où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact. Donner une expression de u en fonction de E et de f.

3. Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, que peut-on dire de plus de u?