MACS2
2018/2019

(1)

Examen de Distributions du 10/01/2019

Correction

Exercice 1:

1. Voir cours.

2. a. f est continue par morceaux donc localement intégrable.

b. Par la formule des sauts (unique discontinuité en 0)

$$(T_f)' = T_{x \mapsto 2x \mathbb{1}_{\{x \leq 0\}}} + \delta_0$$

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$.

D'où : $\forall n \geq 1$, $\langle T_n, \varphi \rangle = \sqrt{n}\left(\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

$$= \sqrt{n}\left[\cancel{\varphi(0)} + \frac{1}{\sqrt{n}}\psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(\cancel{\varphi(0)} - \frac{1}{\sqrt{n}}\psi\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]$$

$$= \cancel{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\cancel{\sqrt{n}}}\left(\psi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \psi\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2\psi(0) = 2\varphi'(0)$$

$$= \langle -2\delta_0', \varphi \rangle$$

Donc, $T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} -2\delta_0'$.

(2)

4. a. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) est bornée, on peut donc lui associer une distribution tempérée par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \cos(2\cdot), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \cos(2x)\varphi(x)\,dx.$$

b. On rappelle que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(e^{ia\cdot}) = 2\pi\delta_a$.

D'où :

$$\mathcal{F}(\cos(2\cdot)) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{2i\cdot} + e^{-2i\cdot}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(e^{2i\cdot}) + \mathcal{F}(e^{-2i\cdot})\right)$$

$$= \pi(\delta_2 + \delta_{-2}).$$

5. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a :

$$\langle \delta_a * T_f, \varphi \rangle = \langle \delta_a \otimes T_f, \varphi^\Delta \rangle = \langle \delta_a, \langle T_f, \varphi(x+\cdot) \rangle \rangle$$

$$= \left\langle \delta_a, x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi(x+y)\,dy \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\varphi(a+y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(u-a)\varphi(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(u)\varphi(u)\,du = \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle$$

Donc $\delta_a * T_f = T_{\tau_a f}$.

Exercice 2:

1. Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\int_0^1 (1-u)\varphi''(xu)\,du$$

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)\varphi''(xu)\,du$

Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi''\|_\infty$.

③ 2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. On a, si $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$, $a>0$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\log\varepsilon = \int_\varepsilon^a \frac{\varphi(0)}{x^2}\,dx + \int_\varepsilon^a \frac{\varphi'(0)}{x}\,dx + \int_\varepsilon^a \psi(x)\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\log\varepsilon$$

$$= \varphi(0)\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a \psi(x)\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\log\varepsilon + \varphi'(0)\left[\log x\right]_\varepsilon^a$$

$$= -\frac{\varphi(0)}{a} + \cancel{\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^a \psi(x)\,dx - \cancel{\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}} + \cancel{\varphi'(0)\log\varepsilon} + \varphi'(0)\log a - \cancel{\varphi'(0)\log\varepsilon}$$

$$= \int_\varepsilon^a \psi(x)\,dx - \frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0)\log a \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_0^a \psi(x)\,dx - \frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0)\log a$$

par continuité de ψ.

Donc la limite considérée existe et vaut : $\int_0^a \psi(x)\,dx - \frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0)\log a$ pour $a>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$, $a>0$.

Alors : $$\left|\left\langle \operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi\right\rangle\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{a} + \|\varphi'\|_\infty \log a + a\underbrace{\|\psi\|_\infty}_{\leq \|\varphi''\|_\infty}$$

Donc $\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$ est bien une distribution d'ordre au plus 2.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Si $\operatorname{supp}\varphi \subset]-\infty,0[$, alors

$$\left\langle \operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{0}{x^2}\,dx - \frac{0}{\varepsilon} + 0\log\varepsilon = 0$$

car on a aussi $\operatorname{supp}\varphi' \subset]-\infty,0[$ donc $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

④ Ainsi $\operatorname{supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) \subset [0,+\infty[$.

Réciproquement, soit $x_0 > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction pic valant 1 en x_0, nulle hors de $\left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$ et positive. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{x_0}{2}$. Alors :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\log\varepsilon = \int_{\frac{x_0}{2}}^{\frac{3x_0}{2}} \underbrace{\frac{\varphi(x)}{x^2}}_{\substack{>0 \text{ sur un voisinage de } x_0 \\ \text{et } \geq 0 \text{ sur } \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]}}\,dx + 0 + 0 > 0$$

En particulier : $\left\langle \operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi\right\rangle > 0$. Donc $x_0 \in \operatorname{supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right)$.

Donc $]0,+\infty[\subset \operatorname{supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) \subset [0,+\infty[$.

Comme le support d'une distribution est un fermé, nécessairement, $\operatorname{supp}\operatorname{Pf}\left(\frac{H}{x^2}\right) \subset [0,+\infty[$..

5. Soit $n \geq 1$ et φ_n comme dans l'énoncé. Alors, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ et si $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$ on a :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi_n(0)}{\varepsilon} + \varphi_n'(0)\log\varepsilon = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x^2}\,dx + 0 + 0$$

$$\xrightarrow{\text{positivité de } \varphi_n} \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{n}}^1 = n - 1 \geq 0.$$

(5) Ainsi : $\forall n \geq 1$, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ et $\langle Pf(\frac{H}{x^2}), \varphi_n \rangle \geq n-1$

Si par l'absurde $Pf(\frac{H}{x^2})$ était d'ordre 0, sur le compact $[0,2]$, on aurait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \text{supp}\,\varphi \subset [0,2],\ |\langle Pf(\tfrac{H}{x^2}), \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_\infty$$

En particulier : $\forall n \geq 1$, $n-1 \leq \langle Pf(\frac{H}{x^2}), \varphi_n \rangle \leq C\|\varphi_n\|_\infty = C$

Or $n-1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc cela est impossible. Ainsi, $Pf(\frac{H}{x^2})$ n'est pas d'ordre 0.

6. On écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\Phi(x)$ avec

$$\Phi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du, \quad \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \|\Phi\|_\infty \leq \|\varphi'\|_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a, si $\text{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$, $a > 0$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \varphi(0)\log\varepsilon = \int_\varepsilon^a \frac{\varphi(0)}{x}dx + \int_\varepsilon^a \Phi(x)dx + \varphi(0)\log\varepsilon$$

$$= \varphi(0)\,[\log x]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a \Phi(x)dx + \varphi(0)\log\varepsilon$$

$$= \varphi(0)\log a - \cancel{\varphi(0)\log\varepsilon} + \int_\varepsilon^a \Phi(x)dx + \cancel{\varphi(0)\log\varepsilon}$$

$$\underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^a \Phi(x)dx + \varphi(0)\log a$$

D'où l'existence de la limite.

(6) 7. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$, $a > 0$. Alors :

$$|\langle vp(\tfrac{H}{x}), \varphi \rangle| \leq (\log a)\|\varphi\|_\infty + a\|\Phi\|_\infty$$
$$\leq (\log a)\|\varphi\|_\infty + a\|\varphi'\|_\infty$$

Donc $vp(\frac{H}{x})$ est bien une distribution d'ordre au plus 1 sur $\mathbb{R}$.

8. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a, si $\text{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$, $a > 0$,

$$\langle vp(\tfrac{H}{x})', \varphi \rangle = -\langle vp(\tfrac{H}{x}), \varphi' \rangle$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_\varepsilon^a \frac{\varphi'(x)}{x}dx + \varphi'(0)\log\varepsilon \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a \frac{\varphi(x)}{x^2}dx + \varphi'(0)\log\varepsilon \right)$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^a \frac{\varphi(x)}{x^2}dx + \varphi'(0)\log\varepsilon \right)$$

$$= -\langle Pf(\tfrac{H}{x^2}), \varphi \rangle - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} \right)$$

$$= -\langle Pf(\tfrac{H}{x^2}), \varphi \rangle - (-\varphi'(0)) = \langle -Pf(\tfrac{H}{x^2}) - \delta_0', \varphi \rangle$$

Donc $vp(\frac{H}{x})' = -Pf(\frac{H}{x^2}) - \delta_0'$.

⑦ 9. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\langle Pf\left(\frac{H}{x^2}\right), \psi_n \rangle = \langle -vp\left(\frac{H}{x}\right)' - \delta_0', \psi_n \rangle$$
$$= -\langle \left(vp\left(\frac{H}{x}\right) + \delta_0\right)', \psi_n \rangle$$
$$= \langle vp\left(\frac{H}{x}\right) + \delta_0, \psi_n' \rangle$$

On : $\forall n \geq 1$, $\psi_n'(x) = \varphi_n(x)\chi(x) + \left(\int_0^x \varphi_n(t)dt\right)\chi'(x)$

D'où : $\langle \delta_0, \psi_n' \rangle = \psi_n'(0) = 0 \times \chi(0) + 0 \times \chi'(0) = 0$

De plus, soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$. Alors :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\psi_n'(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx + \int_{\frac{1}{2n}}^3 \frac{\left(\int_0^x \varphi_n(t)dt\right)\chi'(x)}{x} dx.$$

On : $\forall n \geq 1$, $\int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \geq \log n$ et

$$\int_{\frac{1}{2n}}^3 \frac{\left(\int_0^x \varphi_n(t)dt\right)\chi'(x)}{x} dx = \underbrace{\int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\left(\int_0^x \varphi_n(t)dt\right)\chi'(x)}{x} dx}_{=0 \text{ car } \chi \equiv 1 \text{ sur } [0,2]} + \int_2^3 \frac{\left(\int_0^x \varphi_n(t)dt\right)\chi'(x)}{x} dx$$

On : $\forall x \in [2,3]$, $0 \leq \int_0^x \varphi_n(t)dt = \int_0^2 \varphi_n(t)dt \leq 2$

d'où : $\left| \int_2^3 \frac{\left(\int_0^x \varphi_n(t)dt\right)\chi'(x)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{2} \times 2 \times \|\chi'\|_\infty \times (3-2)$
$= \|\chi'\|_\infty$.

Finalement : $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\psi_n'(x)}{x} dx \geq \log n - \|\chi'\|_\infty$

⑧ et puisque $\psi_n(0) = 0$ on a :

$$\langle vp\left(\frac{H}{x}\right), \psi_n' \rangle \geq \log n - \|\chi'\|_\infty.$$

Si on suppose par l'absurde que $Pf\left(\frac{H}{x^2}\right)$ est d'ordre au plus 1, il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp}\,\varphi \subset [0,3]$,

$$\left|\langle Pf\left(\frac{H}{x^2}\right), \varphi \rangle\right| \leq C_1\|\varphi\|_\infty + C_2\|\varphi'\|_\infty.$$

En particulier : $\forall n \geq 1$, $\left|\langle Pf\left(\frac{H}{x^2}\right), \psi_n \rangle\right| \leq C_1\|\psi_n\|_\infty + C_2\|\psi_n'\|_\infty$.

On $\|\psi_n\|_\infty \leq \int_0^2 \varphi_n(t)dt \leq 2\|\varphi_n\|_\infty = 2$

et $\|\psi_n'\|_\infty \leq \|\varphi_n\chi\|_\infty + \left(\int_0^2 \varphi_n(t)dt\right)\|\chi'\|_\infty$
$\leq 1 + 2\|\chi'\|_\infty$

Donc : $\exists C > 0$, $C = 2C_1 + (1 + 2\|\chi'\|_\infty)C_2$, telle que :

$\forall n \geq 1$, $\log n - \|\chi'\|_\infty \leq \langle Pf\left(\frac{H}{x^2}\right), \psi_n \rangle \leq C$

D'où une contradiction et le résultat : $Pf\left(\frac{H}{x^2}\right)$ d'ordre au plus 2 n'est pas d'ordre au plus 1, elle est donc d'ordre exactement 2.

9

Exercice 3 :

1. Les solutions classiques de $y'+y=0$ sont données par : $\exists C\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}, y(x)=Ce^{-x}$. Montrons que ce sont aussi les seules solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solution de $T'+T=0$. Posons

$$T=e^{-x}(e^{x}T)=e^{-x}S \text{ avec } S\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Alors $T'+T=0 \Leftrightarrow -e^{-x}S+e^{-x}S'+e^{-x}S=0$

$\Leftrightarrow e^{-x}S'=0 \Leftrightarrow S'=0 \Leftrightarrow S$ constante.

Donc : $\exists C\in\mathbb{R}$, $T=T_{x\mapsto Ce^{-x}}$.

2. Nous avons déjà résolu l'équation homogène associée, il suffit donc de chercher une solution particulière de $T'+T=\delta_0$. On : $(He^{-x})'+He^{-x}=\delta_0 e^{-x}-\cancel{He^{-x}}+\cancel{He^{-x}}$

$$=\delta_0 e^{-0}=\delta_0$$

Donc toute solution de $T'+T=\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est de la forme : $T=T_{x\mapsto H(x)e^{-x}+Ce^{-x}}$, $C\in\mathbb{R}$.

3. Si $C\neq 0$, $x\mapsto Ce^{-x}$ se comporte comme e^{u} en $+\infty$ (u en $-\infty$) donc ne définit pas une distribution tempérée.

10

Par ailleurs, $e^{-x}H\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ car elle est bornée par 1, donc l'unique solution de $y'+y=\delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est $e^{-x}H=u_0$.

4. Soit $\varepsilon>0$, Si $u_\varepsilon\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifie $-\varepsilon u_\varepsilon''+u_\varepsilon'+u_\varepsilon=\delta_0$

alors : $\mathcal{F}(-\varepsilon u_\varepsilon''+u_\varepsilon'+u_\varepsilon)=\mathcal{F}(\delta_0)=1$

$\Leftrightarrow -\varepsilon(i\xi)^2\mathcal{F}(u_\varepsilon)+i\xi\mathcal{F}(u_\varepsilon)+\mathcal{F}(u_\varepsilon)=1$

$\Leftrightarrow \mathcal{F}(u_\varepsilon)=\dfrac{1}{1-\varepsilon\xi^2+i\xi}$, le dénominateur ne s'annulant jamais.

Or, $\xi\mapsto\dfrac{1}{1-\varepsilon\xi^2+i\xi}\in L^1(\mathbb{R})$ (ainsi qu'à $L^2(\mathbb{R})$) donc par inversion de Fourier, u_ε existe et est définie de manière unique par : $\forall\varepsilon>0$, $u_\varepsilon=\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{1}{1-\varepsilon\xi^2+i\xi}\right)$.

5. On a $u_0\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(u_0)=\dfrac{1}{1+i\xi}$, donc par continuité de $\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}'(\mathbb{R})\to\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, pour montrer que $u_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}u_0$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}(u_\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}\mathcal{F}(u_0)$ i.e.

$$\frac{1}{1-\varepsilon\xi^2+i\xi}\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})}\frac{1}{1+i\xi}.$$

(11) On : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{1-\varepsilon\xi^2+i\xi}\, d\xi \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{TCD} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\xi)}{1+i\xi}\, d\xi$$

car : $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\varphi(\xi)}{1-\varepsilon\xi^2+i\xi} \right| = \frac{|\varphi(\xi)|}{\sqrt{1-2\varepsilon\xi^2+\varepsilon^2\xi^4+\xi^2}}$

$\leq 2\xi^2 |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$

car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a donc bien $\mathcal{F}(u_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \mathcal{F}(u_0)$.

et $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} u_0$.

Exercice 4 :

1. Voir correction du DM : $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E = \delta_{(0,0)}$.

2. On peut écrire : $u = E * f$ puisque E est une solution élémentaire de $\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2$ et f est à support compact.

3. Le théorème de régularité nous assure alors que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ puisque $E \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.