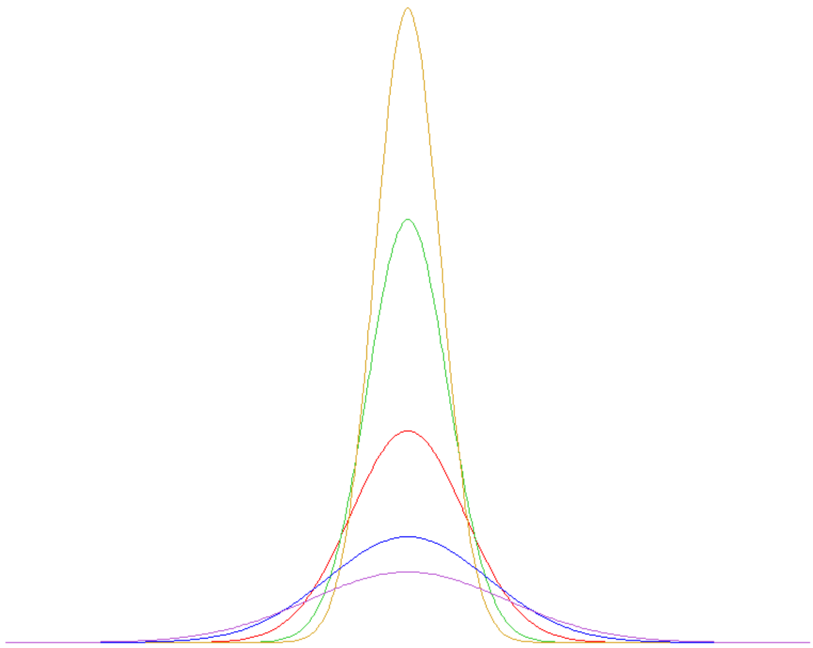
U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs MACS

Année scolaire 2018-2019

Théorie des distributions

H. Boumaza



Le 16 octobre 2018

Bibliographie

[1] J.M. Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses.

[2] G. Carlier, *Notes de cours : Analyse fonctionnelle*, https ://www.ceremade.dauphine.fr/ carlier/poly2010.pdf

[3] F. Golse, *Notes de cours : Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, http ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf

[4] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (256), Springer.

[5] J.P. Marco et autres, *Mathématiques L3, Analyse* , Pearson Education France.

[6] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York-London, 1975.

[7] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Sciences Sup, Dunod.

Table des matières

I Notions de bases **1**

1 Rappels de théorie de l'intégration **3**

1.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . 3

1.1.1 Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue . . . 3

1.1.2 Espaces mesurés et applications mesurables . . . 5

1.2 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . 6

1.2.1 Construction de l'intégrale de Lebesgue . . . 6

1.2.2 Théorème de convergence dominée . . . 7

1.2.3 Intégrales à paramètre . . . 8

1.2.4 Les espaces L^p . . . 10

1.2.5 Théorème de Fubini . . . 10

1.2.6 Théorème du changement de variable . . . 11

2 Introduction à la théorie des distributions **13**

2.1 Autour du Dirac . . . 13

2.1.1 De la "définition" du Dirac . . . 13

2.1.2 Mesure de Dirac en 0 . . . 13

2.1.3 Notion d'intégrale d'action . . . 14

2.2 Notion de dérivée . . . 15

2.3 Le peigne de Dirac . . . 16

2.4 Le Dirac en électrostatique . . . 17

3 Fonctions test **19**

3.1 Notations multi-indicielles . . . 19

3.2 Formule de Taylor avec reste intégral . . . 19

3.3 Fonctions de classe C^∞ à support compact . . . 20

3.3.1 Support d'une fonction continue . . . 20

3.3.2 Espace des fonctions test . . . 20

3.3.3 Topologie de $C_0^\infty(\Omega)$ . . . 21

3.3.4 Fonctions "pic" et "plateau" . . . 22

3.4 Densité par troncature et régularisation . . . 24

3.4.1 Troncature . . . 24

3.4.2 Produit de convolution . . . 25

3.4.3 Régularisation . . . 26

3.5 Application : Lemme de Dubois-Reymond . . . 27

4 Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$ **29**

4.1 Définitions . . . 29

4.1.1 Définition fonctionnelle . . . 30

4.1.2 Définition par l'ordre . . . 30

4.1.3 Ordre d'une distribution . . . 30
4.2 Premiers exemples . . . 31
4.2.1 Distribution associée à une fonction L^1_{loc} . . . 31
4.2.2 Distribution de Dirac . . . 31
4.2.3 Distribution de Dirac dérivée . . . 32
4.2.4 Mesures de Radon . . . 33
4.2.5 Distributions positives . . . 33
4.2.6 La valeur principale de $\frac{1}{x}$ . . . 33
4.2.7 Partie finie de x^α . . . 35
4.2.8 Un exemple de distribution d'ordre infini . . . 36
4.3 Convergence des suites de distributions . . . 36

5 Opérations sur les distributions **39**
5.1 Multiplication par une fonction C^∞ . . . 39
5.2 Les équations $xT = 0$, $xT = 1$ et $xT = S$ . . . 41
5.3 Dérivation d'une distribution . . . 42
5.4 Les équations $T' = 0$ et $\partial_{x_i} T = 0$. . . . 45
5.5 Formule des sauts en dimension 1 . . . 46

6 Support d'une distribution **49**
6.1 Partitions de l'unité . . . 49
6.2 Restriction à un ouvert . . . 50
6.3 Support d'une distribution . . . 50
6.4 Distributions à support compact . . . 52
6.5 Distributions à support ponctuel . . . 53

II Notions avancées **55**

7 Convolution des distributions **57**
7.1 Produit de convolution de deux distributions . . . 57
7.2 Propriétés de la convolution . . . 58
7.3 Interprétation physique de la convolution. . . . 59
7.4 Comment calculer un produit de convolution . . . 59
7.4.1 Convolution de deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ . . . 59
7.4.2 Convolution d'une distribution et d'une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . . . 59
7.4.3 Utilisation des propriétés de la convolution . . . 59

8 Transformée de Fourier des distributions tempérées **61**
8.1 La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . 62
8.1.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . 62
8.1.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . 63
8.1.3 Propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . . . 65
8.2 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées . . . 68
8.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ . . . 70
8.3.1 Définition et propriétés . . . 70
8.3.2 Transformée de Fourier des distributions à support compact . . . 72
8.3.3 Convolution et transformée de Fourier . . . 72
8.3.4 Transformée de Fourier partielle et applications . . . 74
8.3.5 Retour à la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ . . . 75

9 Solutions élémentaires d'EDPs **77**
9.1 Théorèmes d'existence . . . 77
9.1.1 Définitions et premières propriétés . . . 77
9.1.2 Existence de solutions . . . 78
9.2 Théorème de régularité . . . 79
9.3 Exemples de solutions élémentaires . . . 79
9.3.1 Problème du laplacien . . . 79
9.3.2 L'équation des ondes en dimension 1 . . . 81

10 Formule des sauts **83**
10.1 Formule des sauts en dimension 1 . . . 83
10.2 Formule des sauts pour un demi-espace . . . 84
10.3 Ouverts réguliers dans $\mathbb{R}^d$ . . . 85
10.3.1 Définition . . . 85
10.3.2 Vecteur normal unitaire sortant . . . 85
10.3.3 Mesure de surface, exemples . . . 86
10.4 Formule de Stokes . . . 89
10.4.1 Formule de Stokes . . . 89
10.4.2 Intégration par parties multidimensionnelle . . . 91
10.4.3 Formule de Green pour le laplacien . . . 91
10.4.4 Formule des sauts multidimensionnelle . . . 91
10.5 Applications . . . 92
10.5.1 Les relations de Rankine-Hugoniot . . . 92
10.5.2 Équation des ondes en dimension 3 . . . 93

11 Espaces de Sobolev **95**
11.1 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ . . . 95
11.1.1 Définitions et premiers exemples . . . 95
11.1.2 Densité des fonctions régulières . . . 97
11.1.3 Opérations sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ . . . 97
11.2 Théorème d'injection de Sobolev . . . 99
11.3 Théorème de trace dans $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ . . . 100
11.4 Théorème de trace dans $H^m(\mathbb{R}^d_+)$ . . . 102
11.4.1 Les espaces $H^m(\mathbb{R}^d_+)$ . . . 102
11.4.2 Caractérisation de $H^1_0(\mathbb{R}^d_+)$ . . . 103
11.4.3 Les espaces $H^m(\Omega)$ . . . 103

A Dérivation et intégration sous le crochet **105**

Première partie

Notions de bases

Chapitre 1

Rappels de théorie de l'intégration

1.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Quelles sont les propriétés fondamentales que partagent la longueur d'une partie de $\mathbb{R}$, l'aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$, le volume d'une partie de $\mathbb{R}^3$ et plus généralement le volume d'une partie de $\mathbb{R}^d$? Peut-on donner un sens au volume de toute partie de $\mathbb{R}^d$? On attend d'une notion de longueur, d'aire et de volume d'avoir en commun la positivité et la propriété d'additivité qui est que, si deux parties A et B de $\mathbb{R}^d$ sont disjointes, le volume de leur réunion est égal à la somme de leurs volumes : $\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$. Une autre propriété attendue du volume est l'invariance par translation. Si $x \in \mathbb{R}^d$ et A est une partie de $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{vol}(x + A) = \mathrm{vol}(A)$. Au début du XX^e siècle, Émile Borel introduit une idée clé, celle qu'une notion de volume doit vérifier une propriété plus forte, l'additivité dénombrable, pour pouvoir s'intégrer utilement dans les théories modernes d'analyse. Une « bonne » notion de volume devra donc vérifier que, pour toute famille dénombrable $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^d$ deux à deux disjointes,

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(A_p).$$

Mais, une telle notion de volume qui associerait à *toute* partie de $\mathbb{R}^d$ un réel positif vérifiant l'additivité dénombrable et l'invariance par translation n'existe pas. C'est Henri Lebesgue qui en 1902 sera le premier à construire un exemple de *mesure* sur $\mathbb{R}$ qui soit dénombrablement additive et invariante par translation. Cette mesure correspond à la notion de volume recherchée. Pour cela, Lebesgue introduit la notion de mesure extérieure qui approche « par au-dessus » la mesure de toute partie de $\mathbb{R}$. Puis il définit les parties de $\mathbb{R}$ qui seront suffisament peu irrégulières pour que l'on puisse leur associer une mesure. Ce sont les parties Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$.

1.1.1 Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue

Nous commencons par définir les pavés de $\mathbb{R}^d$ et leur volume. Un pavé P dans $\mathbb{R}^d$ est un produit cartésien de d intervalles de $\mathbb{R}$ bornés (ouverts, fermés, semi-ouverts ou semi-fermés)

$$P = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d),$$

où $a_j \leq b_j$ sont des nombres réels, $j = 1, \ldots, d$. Pour un tel sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, la notion naturelle de volume associée est le produit des longueurs des côtés. On appelle *volume* d'un pavé P le réel positif noté $|P|$ défini par

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Une union de pavés est dite *quasi disjointe* si les intérieurs des pavés de l'union sont disjoints. Enfin, un *cube* est un pavé pour lequel $b_1 - a_1 = \cdots = b_d - a_d$. L'intérêt de ces cubes et pavés provient du fait qu'ils approchent bien les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.1.1. *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme union dénombrable de cubes quasi disjoints.*

Pour définir le volume d'une partie plus compliquée qu'un pavé, nous commençons par construire une fonction qui à toute partie de $\mathbb{R}^d$ associe un volume qui généralise le volume des pavés. L'idée est d'approcher « par au-dessus » tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ par des cubes. Soit E une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle mesure extérieure de E le réel positif défini par

$$\lambda_d^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |C_j| \;\middle|\; \forall j \geq 1,\ C_j \text{ est un cube fermé et } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\}.$$

Pour les parties simples comme l'ensemble vide, un point ou un cube, la mesure extérieure correspond bien à notre idée intuitive de volume. La mesure extérieure de $\mathbb{R}^d$ est infinie.
Toutefois, la mesure extérieure ne vérifie pas l'additivité dénombrable voulue pour définir une bonne notion de volume. Nous avons seulement l'inégalité suivante : si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, alors

$$\lambda_d^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d^*(E_j).$$

On a tout de même que si $E = E_1 \cup E_2$ avec $d(E_1, E_2) > 0$, alors $\lambda_d^*(E) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$.
Malgré ces deux propriétés, on ne peut pas conclure en général que, si $E_1 \cup E_2$ est une union disjointe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, $\lambda_d^*(E_1 \cup E_2) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$. Cette égalité n'aura lieu que pour des ensembles qui ne sont pas trop pathologiques, les ensembles mesurables.

Définition 1.1.2. *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit Lebesgue-mesurable, ou plus simplement mesurable, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant E tel que*

$$\lambda_d^*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon.$$

On a alors que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est mesurable, qu'une union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable et que le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.

Nous pouvons maintenant définir la notion de mesure pour un ensemble mesurable. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, on définit sa mesure de Lebesgue par $\lambda_d(E) = \lambda_d^*(E)$. Alors, la mesure de Lebesgue vérifie bien la propriété d'additivité dénombrable.
Soit $(E_j)_{j\geq 1}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables et disjoints dans $\mathbb{R}^d$. Alors leur réunion $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ est mesurable et

$$\lambda_d(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(E_j).$$

On a aussi l'invariance par translation : si E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le translaté $x + E = \{x + y \mid y \in E\}$ est mesurable et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.

On note souvent aussi la mesure de Lebesgue par le symbole $\mathrm{d}x$ au lieu de λ_d.

1.1.2 Espaces mesurés et applications mesurables

On généralise la notion de mesure à un ensemble quelconque en demandant à ce que les principales propriétés de stabilité des ensembles mesurables et de la mesure de Lebesgue soient conservées.

Définition 1.1.3. *Soit X un ensemble. Une tribu sur X est un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *$X \in \mathcal{M}$;*
2. *si $A \in \mathcal{M}$, son complémentaire A^c est dans $\mathcal{M}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*

Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés ensembles mesurables. Un espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{M})$ où X est un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X.

Exemple 1.1.4. ***(Tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).*** *L'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$ Lebesgue-mesurables forme une tribu sur $\mathbb{R}^d$ que nous noterons $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$.*

Exemple 1.1.5. *On appelle tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, la plus petite tribu de $\mathbb{R}^d$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ (pour la topologie usuelle).*

Une mesure est une fonction définie sur une tribu, à valeurs positives, vérifiant une condition d'additivité dénombrable. Nous axiomatisons donc la propriété de σ-additivité obtenue pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1.6. *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ est une application de $\mathcal{M}$ dans $[0, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables deux à deux disjointes,*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \ (\sigma-\text{additivité}).$$

Si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$, le triplet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

Exemple 1.1.7. *La mesure de Lebesgue est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d))$.*

Exemple 1.1.8. *Les mesures à poids, de la forme $\mathrm{d}\mu(x) = h(x)\mathrm{d}x$ avec $h > 0$ et qui vérifient :*

$$\forall f \text{ mesurable}, \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)h(x)\mathrm{d}x.$$

Exemple 1.1.9. *Les mesures discrètes notées $\mathrm{d}\mu = \sum \alpha_j \delta_{a_j}$ et qui vérifient :*

$$\forall f \text{ mesurable}, \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \sum \alpha_j f(a_i).$$

Définition 1.1.10. *On appelle mesure de Radon positive sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ une mesure positive μ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ qui est finie sur les compacts :*

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \ \mu(K) < +\infty.$$

On appelle mesure de Radon tout combinaison linéaire $\mu_1 - \mu_2 + \mathrm{i}(\mu_3 - \mu_4)$ où les μ_j sont des mesures de Radon positives.

Les trois exemples précédents sont des mesures de Radon positives.

Concluons par un point de terminologie.

Définition 1.1.11. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit P une propriété définie sur X. On dit que P est vraie μ-presque partout si elle est vraie hors d'un ensemble mesurable de mesure nulle. On écrit aussi P vraie μ-pp. On dit encore que P est vraie pour μ-presque tout x dans X.*

On termine par la notion de mesurabilité d'une application entre espaces mesurables qui est analogue à celle de la continuité d'une application entre espaces topologiques et utilise la notion d'image réciproque.

Définition 1.1.12. *Soient $(X, \mathcal{M})$ et $(Y, \mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Une application f de X dans Y est dite mesurable lorsque, pour tout ensemble mesurable $N \in \mathcal{N}$, son image réciproque $f^{-1}(N)$ est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(N) \subset \mathcal{M}$.*

Exemple 1.1.13. ***(Fonctions caractéristiques).*** *On considère un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$ et on munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Pour une partie A de X,* la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.

1.2 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

1.2.1 Construction de l'intégrale de Lebesgue

On commence par définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive. On appelle fonction étagée toute combinaison linéaire finie d'indicatrices d'ensembles mesurables :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}, \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ A_j \subset \mathbb{R}^d \text{ et mesurable.}$$

On appelle *intégrale de φ sur $\mathbb{R}^d$* la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_d(A_j) \in [0, +\infty].$$

Pour définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$, on utilise un procédé d'approximation : on cherche à écrire f sous la forme $f = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n$ avec $\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ étagée et mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pose ensuite $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n$.

Proposition 1.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite $(\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées mesurables telles que*

1. *$0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
2. *la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.*

De plus, si f est bornée sur $A \subset X$, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ de la façon suivante. Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On appelle *intégrale* de f la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d \ : \ \varphi : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[\text{ mesurable étagée et telle que } \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty].$$

Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est une partie mesurable, on pose $\int_A f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f \mathbf{1}_A d\lambda_d$.
Nous pouvons maintenant étendre la définition de l'intégrabilité aux fonctions à valeurs réelles ou complexes (et ensuite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$).

Soit$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Notons f_+ et f_- les applications

$$f_+ = \max(f, 0) \text{ et } f_- = \max(-f, 0).$$

Les applications f_+ et f_- sont mesurables, car f l'est, et sont à valeurs dans $[0, +\infty[$. On a alors les relations

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-.$$

Définition 1.2.2 (Fonction intégrable à valeurs réelles)**.** *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite intégrable par rapport à la mesure λ_d, ou simplement intégrable, si f est mesurable et si $\int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda_d < +\infty$. Dans ce cas, on appelle intégrale de f sur $\mathbb{R}^d$ le nombre réel, noté $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, défini par*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f_+ d\lambda_d - \int_{\mathbb{R}^d} f_- d\lambda_d.$$

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs réelles.

Pour une fonction à valeurs complexes, son intégrale est tout simplement la somme de l'intégrale de sa partie réelle et de i fois l'intégrale de sa partie imaginaire.

1.2.2 Théorème de convergence dominée

Nous présentons le théorème de convergence dominée ou **TCD** en abrégé. Ce théorème affirme que $\int \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$ lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite simplement convergente de fonctions intégrables dominée par une fonction positive intégrable g au sens suivant : $|f_n| \leq g$ pour tout n. Le fait qu'il suffise d'avoir une convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est un grand progrès par rapport aux énoncés qui peuvent être rencontrés dans le cadre de l'intégrale de Riemann. D'une manière générale, le théorème de convergence dominée est, comme nous le verrons, d'une grande utilité pratique.

Théorème 1.2.3 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que*

(i) il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f presque partout sur $\mathbb{R}^d$;

(ii) il existe une fonction $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Dans la pratique, la fonction f est souvent *définie* presque partout par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et prolongée arbitrairement à $\mathbb{R}^d$. La fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est mesurable comme limite simple presque partout d'une suite de fonctions mesurables. Le fait qu'il soit suffisant, dans l'énoncé du TCD, d'avoir une convergence simple presque partout et une domination presque partout est typique des théorèmes d'interversion limite-intégrale dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Exemple 1.2.4. *Déterminons la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite :*

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On a :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(t)$ tend vers $\mathrm{e}^{-t^2}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{t^2}{n} \leq \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1,\ |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t^2}$$

qui est indépendante de n et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc, on peut appliquer le TCD à $(f_n)_{n\geq 1}$ pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1.2.3 Intégrales à paramètre

Le TCD implique les théorèmes suivants sur les intégrales à paramètres.

Théorème 1.2.5 (Continuité sous le signe $\int$)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}^p$. On considère une fonction f de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'application partielle $x \mapsto f(x,y)$ est continue au point a.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $|f(x,y)| \leq g(y)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$.*

Alors il est possible de définir une application $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, et F est continue au point a.

Exemple 1.2.6. ***(Transformée de Fourier).*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, e^{-i(x|y)}\mathrm{d}y,$$

où $(x|y)$ est le produit scalaire euclidien de x et y. Alors $\hat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^p$.

Après la continuité, nous étudions la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème 1.2.7 (Dérivabilité sous le signe $\int$)**.** *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On considère une fonction f de $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est intégrable.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'application partielle $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est de classe C^1 dans $\mathcal{O}$.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\},\ \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right| \leq g(y)$$

pour tout $x \in \mathcal{O}$ et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$.

Alors, il est possible de définir une fonction $F : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_d(y)$. Cette fonction est de classe C^1 dans $\mathcal{O}$, et ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_d(y).$$

Joint au théorème de continuité précédent, le théorème de dérivation permet de montrer qu'une fonction est de classe C^1.

Exemple 1.2.8. ***(Transformée de Laplace).*** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On appelle transformée de Laplace de f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^{\infty} e^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa limite en $+\infty$ est nulle.

Nous sommes souvent amenés à démontrer la continuité ou la dérivabilité d'une fonction F définie par une intégrale sur un intervalle ouvert I. Il arrive alors, comme c'est le cas pour démontrer la dérivabilité de la transformée de Laplace, que l'hypothèse de domination nécessaire à l'application d'un théorème de régularité sous le signe $\int$ ne soit pas vraie sur tout l'intervalle I, mais seulement sur des sous-intervalles de I. Dans ce cas, on utilise le fait que la régularité d'une fonction (sa continuité ou sa dérivabilité) est une notion locale. En effet, si une fonction est régulière au voisinage d'un point, elle l'est aussi en ce point. Si on veut démontrer la régularité de F en tout point de I, on commence par fixer un point $a \in I$. Alors, comme I est ouvert, a possède un voisinage $]\alpha, \beta[$ contenu dans I, voisinage sur lequel on peut tenter de démontrer l'hypothèse de domination voulue. Si cela est possible, les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ s'appliquent et on démontre que F est régulière sur $]\alpha, \beta[$. En particulier, F est régulière en a. Le point a étant quelconque dans I, F est régulière sur I.
Pour étudier des limites aux bords de l'intervalle ouvert où les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ ne s'appliquent pas, comme la limite en $+\infty$ de la transformée de Laplace, on applique directement le théorème de convergence dominée ou celui de convergence monotone. On utilise pour cela la caractérisation séquentielle des limites.

Exemple 1.2.9. *Etudions la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Soit $f : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable car*

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n t^n \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, la fonction $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est continue en x et intégrable en t et on a, si $a > 0$,

$$\forall x \geq a,\ \forall t \geq 0,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq t^n \mathrm{e}^{-at}$$

qui est indépendante de x et intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc, par le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, on en déduit que

$$F : x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$. Soit $x_0 > 0$. Il existe $a > 0$ tel que $x_0 \in [a,+\infty[$. Comme F est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$, elle l'est en x_0. Cela étant vrai pour tout $x_0 > 0$, F est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
On remarque que l'on a de plus $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1.2.4 Les espaces L^p

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions f, mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$, qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, \mathrm{d}\lambda_d < +\infty.$$

On appelle espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ l'espace des classes de fonctions égales presque partout qui sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. Plus précisement, on définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ par :

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; f = g \text{ p.p.}$$

et on définit $L^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\sim$. On identifie ensuite la classe d'équivalence de $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ qui est un élément de $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec son représentant f.
Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \mathrm{d}\lambda_d \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors $||\cdot||_p$ est une norme sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour lequel cet espace est complet.

Dans les espaces L^p ($1 \leq p < +\infty$) on a un théorème de convergence dominée en remplaçant "intégrable" par $g \in L^p$ et la convergence a alors lieu dans L^p.

Proposition 1.2.10 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient f et g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. Alors, pour tout $p \geq 1$, si q est l'exposant conjugué de p,* i.e. *le réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} f^p(x)\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g^q(x)\mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{q}} \leq +\infty.$$

Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$ ait lieu presque partout.

Corollaire 1.2.11. *Soient p et q deux exposants conjugués. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, le produit fg est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q.$$

1.2.5 Théorème de Fubini

Lorsque l'on calcule l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ de plusieurs variables, le premier outil auquel on doit penser est le théorème de Fubini. Celui s'énonce sous la forme suivante :

Théorème 1.2.12. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+p})$. Alors les fonctions suivantes sont définies presques partout*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \textit{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x$$

et sont respectivement dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^1(\mathbb{R}^p)$. De plus, on la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dx \right) dy.$$

Remarque 1.2.13. *Le théorème reste vrai pour f non forcément intégrable, mais positive (pour une fonction à valeurs réelles).*

1.2.6 Théorème du changement de variable

L'autre outil essentiel permettant de calculer une intégrale est le théorème de changement de variable.

On note pour φ une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et pour $x \in U$, la Jacobienne de φ en x par $J_\varphi(x)$. C'est la matrice de la différentielle de φ au point x dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.2.14. *Soit $\varphi : U \to V = \varphi(U)$ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Alors,*

1. *Pour toute fonction g mesurable et positive, $g : \varphi(U) \to [0, +\infty]$,*

$$\int_{\varphi(U)} g(x)\mathrm{d}x = \int_U g(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$

2. *De plus, une fonction mesurable $f : \varphi(U) \to \mathbb{C}$ est intégrable sur $\varphi(U)$ si et seulement si $(f \circ \varphi)|\det(J_\varphi(\cdot))|$ est intégrable sur U et on a*

$$\int_{\varphi(U)} f(x)\mathrm{d}x = \int_U f(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$

Les changements de variable qui interviennent le plus souvent sont les changements en polaire et les changements de variable linéaires.
Pour le changement de variables en polaire on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0,2\pi[\times]0,+\infty[} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Cela donne en dimension d :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1,\dots,x_d)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d = \int_{S(0,1)\times]0,+\infty[} g(r,\theta_1,\dots,\theta_{d-1})r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta_1\cdots\mathrm{d}\theta_{d-1}$$

où

$$g(r,\theta_1,\dots,\theta_{d-1}) = f(r\cos(\theta_1), r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2),\dots, r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1}), r\sin(\theta_1)\cdots\sin(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1})).$$

En effet, le changement en polaire en dimension 2 est donné par le difféomorphisme $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ dont le Jacobien en tout point est donné par :

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

Exemple 1.2.15. *Calculons l'intégrale gaussienne : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$. Pour cela on commence par utiliser Fubini pour justifier que*

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Puis on effectue un changement de variables en polaires :

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^\infty = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi.$$

Donc : $I = \sqrt{\pi}$.

Exemple 1.2.16. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,*

1. $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ *est convergente si et seulement si* $\alpha < d$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > d$.

En effet, il suffit d'effectuer un changement de variables en polaires pour se ramener au cas du critère de Riemann en dimension 1. *On a alors, avec* $dx = r^{d-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}x = \int_{S(0,1)} \int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

La convergence de cette intégrale revient donc à celle de $\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1-d}} \mathrm{d}r$ *et par le critère de Riemann, elle converge si et seulement si* $\alpha + 1 - d < 1$ *donc* $\alpha < d$. *Idem pour l'autre cas.*

Lorsque l'on utilise Fubini ou le changement de variable on procède en général en deux temps : on applique la version pour les fonctions positives à $|f|$ pour justifier de l'intégrabilité puis on utilise à nouveau le théorème pour faire le calcul effectif de l'intégrale. Rappelons aussi que ces théorèmes, tout comme l'IPP ne permettent pas de calculer directement une intégrale en général (sauf cas particuliers) mais permettent juste de se ramener à un calcul de primitive usuelle.

Pour l'ensemble des démonstrations et plus de précisions sur la théorie de l'intégrale de Lebesgue, nous renvoyons à [5].

Chapitre 2

Introduction à la théorie des distributions

2.1 Autour du Dirac

2.1.1 De la "définition" du Dirac

Il est parfois utile, dans la résolution de certains problèmes de la Physique, de considérer des objets, appelés couramment par abus de langage "fonctions", mais mal définies comme représentations ponctuelles. L'exemple le plus célèbre en est la mesure de Dirac, qui, si elle est considérée comme une fonction, est "nulle en dehors de 0, infinie en 0".
Il est clair que la définition de la mesure de Dirac par la phrase de Dirac n'est pas complète. En effet, on considère les deux fonctions, qui sont elles bien définies sur $\mathbb{R}$ pour tout $\varepsilon > 0$: la fonction ϕ_1^ε telle que $\phi_1^\varepsilon(x) = 0$ pour $|x| \geq \varepsilon$, et $\phi_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|)$ pour $|x| \leq \varepsilon$, et la fonction $\phi_2^\varepsilon = 2\phi_1^\varepsilon$. Elles vérifient toutes les deux, à la limite, la relation "nulle en dehors de 0, infinie en 0". En revanche, il faut donner un autre critère pour les différencier.
Le premier critère auquel on pense est intégral : on calcule $\int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)dx = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \phi_2^\varepsilon(x)dx = 2$. Ceci permet de les différencier.
Ce critère n'est pas suffisant : en effet considérons $\phi_3^\varepsilon(x)$ la fonction définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_3^\varepsilon(x) = \phi_1^\varepsilon(x), |x| \leq \varepsilon \\ \phi_3^\varepsilon(x) = -\phi_1^\varepsilon(x - 2\varepsilon), |x - 2\varepsilon| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

On constate que $\int_{\mathbb{R}} \phi_3^\varepsilon(x)dx = 0$. On ne peut donc pas différencier ϕ_3^ε de $2\phi_3^\varepsilon$.

Il est donc nécessaire d'évaluer plus de quantités que la simple intégrale. En effet on considère un dernier exemple, $\phi_4 : x \mapsto \phi_1(x - \varepsilon)$. Cette fonction est nulle en 0, et elle tend en tout point x différent de 0 vers 0, car pour tout $x > 0$ il existe ε tel que $x > 2\varepsilon$, donc $\phi_4(x) = 0$, et pour $x < 0$, $\phi_4(x) = 0$. Cette fonction ϕ_4 tend donc simplement vers 0, mais son intégrale totale est 1. On voit ici qu'on ne peut pas identifier le point de singularité pour cette fonction en considérant uniquement sa limite et son intégrale.

2.1.2 Mesure de Dirac en 0

Nous proposons dans un premier temps l'analyse de la distribution ϕ_1^ε en intégrant la distribution sur $[a, b]$, où a et b sont deux réels distincts, indépendants de ε. On trouve que, pour chaque ligne du système ci-dessous, il existe $\varepsilon(a, b)$ tel que, pour $\varepsilon < \varepsilon(a, b)$, on ait l'égalité indiquée. Par exemple, dans le premier cas, $\varepsilon(a,b) = |b|$, dans le deuxième cas $\varepsilon(a,b) = a$.

$$\begin{cases} a < b < 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 0 \\ 0 < a < b, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 0 \\ a < 0 < b, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = 1 \\ a = 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2} \\ b = 0, \int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

On en déduit que, si $I_1(a,b)$ est la limite lorsque ε tend vers 0 de $\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x)dx$, on trouve que

$$\text{Si } 0 \in]a,b[,\ I_1(a,b) = 1, \quad \text{si } 0 \notin [a,b], I_1(a,b) = 0 \quad \text{et } I_1(0,b) = I_1(a,0) = \frac{1}{2}.$$

Aux cas particuliers de $ab = 0$ près, la limite $I(a,b)$ indique l'appartenance de 0 à $[a,b]$. C'est pour cela que l'on appelle souvent la limite de ϕ_1^ε la mesure de Dirac de 0.

2.1.3 Notion d'intégrale d'action

Nous allons maintenant évaluer une infinité de quantités pour essayer de mieux appréhender la masse de Dirac. Définissons

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ I_i^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi_i^\varepsilon(x)\phi(x)dx$$

où ϕ est une fonction au moins continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.
Un simple changement de variable $x = \varepsilon t$ sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$, $x - 1 = \varepsilon t$ sur $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, $x = 2\varepsilon + \varepsilon t$ sur $[\varepsilon, 3\varepsilon]$ conduit aux égalités

$$\begin{cases} I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)(1-|t|)dt \\ I_2^\varepsilon(\phi) = 2I_1^\varepsilon(\phi) \\ I_3^\varepsilon(\phi) = \int_{-1}^1 [\phi(\varepsilon t) - \phi(2\varepsilon + \varepsilon t)](1-|t|)dt \end{cases}.$$

La fonction $t \to \phi(\varepsilon t)$ est bornée, pour $\varepsilon < 1$, par le maximum de ϕ sur $[-1,1]$, qui existe puisque ϕ est continue sur le compact $[-1,1]$. Ainsi on peut appliquer le théorème de la convergence dominée dans les trois intégrales, car la fonction $1-|t|$ est intégrable sur $[-1,1]$, d'intégrale 1.
La limite de $\phi(\varepsilon t)$, pour chaque t, est $\phi(0)$. La limite de $\phi(2\varepsilon + \varepsilon t)$, pour tout t, est $\phi(0)$. Ainsi on trouve

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1^\varepsilon = \phi(0), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_2^\varepsilon = 2\phi(0), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_3^\varepsilon = 0.$$

Là, on peut différencier les limites de ϕ_1^ε ϕ_2^ε et ϕ_3^ε. De plus, les intégrales écrites ci-dessus vérifient les inégalités, pour $\varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} I_1^\varepsilon(\phi) &\leq \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)|, \\ I_2^\varepsilon(\phi) &\leq 2 \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)| \\ \text{et} \quad I_3^\varepsilon(\phi) &\leq 2 \max_{x\in[-1,1]} |\phi(x)|. \end{aligned}$$

On a ainsi, pour tout $i \in \{1,2,3\}$:

$$I_i^\varepsilon(\phi) \leq C \max_{x\in\mathbb{R}} |\phi(x)|, \quad C > 0.$$

Lorsqu'on rencontre ce phénomène en Physique, on dit que $\lim \phi_1^\varepsilon$ et $\lim \phi_2^\varepsilon$ sont deux mesures de Dirac, et "chargent" le point 0 par la valeur 1 ou par la valeur 2.

2.2 Notion de dérivée

Un des objectifs du cours est de pouvoir trouver une classe d'objets, appelés distributions, dans laquelle on puisse dériver des fonctions qui ne sont pas dérivables au sens classique. Etudions le cas de la fonction de Heaviside, notée ici H, égale à 1 pour $x > 0$ et à 0 pour $x < 0$, égale à $\frac{1}{2}$ en $x = 0$, est dérivable. Quel serait le candidat pour cette dérivée ? On voit que, pour $x_0 \neq 0$, le taux d'accroissement est nul dès que $h < |x_0|$, et pour $x_0 = 0$, ce taux d'accroissement est $\frac{1}{2|h|}$. Il tend ainsi vers $+\infty$ quand h tend vers 0, donc un candidat souhaitable pourrait être la distribution de Dirac.
Les opérations classiques sur cette classe d'objets doivent être encore valables, donc on veut pouvoir calculer les dérivées de la fonction de Heaviside en calculant la dérivée de fonctions qui l'approchent. Un exemple de suite de fonctions approchant H est donné par

$$H_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\epsilon \\ 1 - \frac{(\epsilon - x)^2}{2\epsilon^2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \epsilon \\ \frac{(\epsilon + x)^2}{2\epsilon^2} & \text{si} \quad -\epsilon \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > \epsilon \end{cases}$$

Cette fonction admet pour dérivée ϕ_1^ε. Elle est donc de classe C^1 et de plus, H_ϵ tend vers H au sens L^1 car on trouve que $\int |H_\epsilon - H| dx = \frac{\varepsilon}{2}$.
On a une convergence simple vers H, mais la convergence au sens de la norme du sup n'est pas assurée. En effet, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |H_\epsilon(x) - H(x)| = \frac{1}{2}.$$

D'après l'analyse faite précédemment sur la famille $(\phi_1^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ on constate que, pour tout ϕ continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (H_\varepsilon)'(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x)\phi(x)dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \phi(0).$$

On peut donc considérer que la dérivée de H est l'impulsion de Dirac en 0. Cela sera formalisé au chapitre 5.

On peut à présent effectuer la même analyse que celles faite sur les fonctions ϕ_1^ε sur les fonctions dérivées de ϕ_1^ε. Nous essayons donc de construire une dérivée de l'impulsion de Dirac en 0. Considérons la fonction $(\phi_1^\varepsilon)'$. C'est une fonction constante par morceaux, valant ε^{-2} pour $-\varepsilon < x < 0$, et $-\varepsilon^{-2}$ lorsque $0 < x < \varepsilon$. On constate que le critère intégral fonctionne et ne fonctionne pas à la fois : en effet l'intégrale L^1 de la fonction est égale à $\frac{2}{\varepsilon}$, qui n'a pas de limite, en revanche l'intégrale est nulle. L'analyse de cette distribution est très imprécise. Le critère précédent conduit au calcul de $\int_{\mathbb{R}} (\phi_1^\varepsilon)'(x)\phi(x)dx$ pour ϕ continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On trouve

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi_1^\varepsilon)'(x)\phi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^0 \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx - \int_0^\varepsilon \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_0^1 \frac{\phi(\varepsilon t) - \phi(-\varepsilon t)}{\varepsilon}dt \quad \text{avec } x = \varepsilon t.$$

Sans hypothèse supplémentaire sur ϕ, on ne peut pas aller plus loin dans l'étude de la limite lorsque ε tend vers 0. On suppose que ϕ est dérivable en 0, plus précisément de classe C^1. Alors, une formule de Taylor avec reste intégral donne $\phi(\pm\varepsilon t) = \phi(0) \pm \varepsilon t \int_0^1 \phi'(\pm\varepsilon\theta t)d\theta$, ce qui donne

$$\int_{-\varepsilon}^0 \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx - \int_0^\varepsilon \frac{\phi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_0^1 t \left[\int_0^1 \phi'(\varepsilon\theta t)d\theta + \int_0^1 \phi'(-\varepsilon\theta t)\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}t.$$

Une application de la convergence dominée prouve que cette intégrale converge vers

$$-\int_0^1 2t\phi'(0)\mathrm{d}t = -\phi'(0).$$

On voit ainsi que l'on a dû supposer ϕ' de classe C^0 et ϕ de classe C^1 pour obtenir une limite finie.
Notons que l'on peut construire un exemple où la suite d'intégrales ne converge pas si ϕ est par exemple seulement continue. On introduit la fonction ϕ_5 définie par $\phi_5(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}(\varepsilon^2 - x^2)$ sur $|x| \leq \varepsilon$ et 0 ailleurs. On constate que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_5(x)\phi(x)dx = \int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)(1-t^2)dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3}\phi(0).$$

D'autre part, la dérivée de cette fonction est la fonction ϕ_6 définie par $\phi_6(x) = -\frac{2x}{\varepsilon^3}$ sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et 0 ailleurs. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_6(x)\phi(x)dx = -\frac{2}{\varepsilon}\int_{-1}^1 \phi(\varepsilon t)tdt.$$

Ainsi, lorsque l'on choisit $\phi : x \mapsto \frac{x}{|x|}(|x|)^{\frac{1}{2}}$, cette intégrale vaut

$$-\frac{2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^1 |t|(|t|)^{\frac{1}{2}}dt = -4\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt = -\frac{8}{3}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

L'intégrale peut donc diverger si ϕ est supposée seulement de classe C^0.
Mais, si on suppose ϕ de classe C^1 on peut utiliser à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral, $\phi(x) = \phi(0) + x\int_0^1 \phi'(xt)dt$. Alors, de $\int_{-1}^1 t\phi(0)dt = 0$ par imparité, on déduit

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_6(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -2\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 \phi'(\varepsilon tu)du\right) t^2dt \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\frac{4}{3}\phi'(0).$$

Rapprochant ce résultat de $\int \phi_5(x)\phi(x)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3}\phi(0)$, on voit apparaitre une formule de dérivation qui ressemble à une formule d'intégrations par parties avec en particulier la présence du signe $-$.
Dans cette partie, on a donc obtenu un critère suffisant pour obtenir une grande classe de distributions comme limite de fonctions : il suffit de prendre ϕ de classe C^∞ de façons à pouvoir "dériver" des fonctions non dérivables.

2.3 Le peigne de Dirac

On veut construire un réseau périodique infini de charges ponctuelles placées en tout point entier relatif. C'est un objet naturel dans l'étude du transport électronique dans des réseaux cristallins. La fonction associée simple est alors

$$\Psi^\varepsilon : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_1^\varepsilon(x-n).$$

Cette fonction, bien qu'elle soit dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, puisque intégrable sur tout compact, n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut en effet vérifier que l'intégrale sur tout compact est équivalente à la taille du compact lorsque celle-ci tend vers $+\infty$.
On vérifie aussi que, pour une fonction continue et bornée ϕ donnée,

$$\forall m,n \in \mathbb{Z},\ \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^{\varepsilon}(x)\phi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \int_{-1}^{1} (1-|t|)\phi(p+\varepsilon t)dt.$$

Par le TCD,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^{\varepsilon}(x)\phi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \phi(p).$$

Lorsque m tend vers $-\infty$ et n tend vers $+\infty$, cette limite existe lorsque $\sum |\phi(p)| < \infty$. La fonction $\phi :\ x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ ne vérifie pas ce critère alors que $\phi :\ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ le vérifie.
Pour donner un sens à la somme infinie définissant le peigne de Dirac, la fonction ϕ que l'on choisit comme fonction test doit être "suffisamment décroissante à l'infini". Ce critère est automatiquement vérifié si la fonction ϕ est à support compact. Nous introduisons ainsi les fonctions test, selon la terminologie inspirée de la mécanique classique, qui sont les fonctions de classe C^{∞} à support compact.

2.4 Le Dirac en électrostatique

Nous expliquons à présent la terminologie que nous avons introduite lorsque nous avons parlé de notion de mesure "chargeant" 0. L'équation de l'électrostatique est

$$\Delta V + \frac{\rho_v}{\varepsilon_0} = 0,$$

associée au potentiel

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \quad r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On dit que ρ_v est la distribution de charges associée à la charge q, calculée de manière intégrale. Calculons ΔV hors de $(x,y,z) = (0,0,0)$. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3} \\ \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On obtient les mêmes formules en dérivant par rapport à y puis z et en sommant, hors du point $(0,0,0)$, $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$. La "fonction" $\Delta(\frac{1}{r})$ est un bon candidat pour être une distribution de Dirac. On vérifie, pour s de classe C^{∞} à support compact et **radiale**, que, par intégrations par parties et utilisant l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3, r\geq\varepsilon} \Delta(\tfrac{1}{r})s(r)dxdydz &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \tfrac{1}{r}(\Delta s)4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi \int_{\varepsilon}^{\infty} [r\tfrac{d^2s}{dr^2} + 2\tfrac{ds}{dr}]dr \\ &= 4\pi \int_{\varepsilon}^{\infty} [\tfrac{d}{dr}(r\tfrac{ds}{dr}) + \tfrac{ds}{dr}]dr \\ &= -4\pi\varepsilon\tfrac{ds}{dr}(\varepsilon) - 4\pi s(\varepsilon). \end{aligned}$$

Remarquons que la première égalité doit être considérée comme une définition. On vérifie que cette intégrale converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $-4\pi s(0)$. La distribution associée est alors la distribution $-4\pi\delta_0$, par analogie avec la "distribution" notée δ_0 sur $\mathbb{R}$ qui fait correspondre à ϕ la valeur $\phi(0)$ et que nous avons déjà rencontré plus haut.

Ainsi on écrira plus loin

$$\Delta(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta_0.$$

Lorsque $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$, on trouve $\Delta V = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta_0$.

A la charge q placée en $r = 0$ est associée la distribution de charge $q\delta_0$ selon la terminologie physique. Ceci explique que l'on dise que la distribution δ_0 "charge" le point 0 avec une charge 1.

Chapitre 3

Fonctions test

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$, k est un entier naturel ou le symbole ∞ (sauf précision). On désigne par $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω et par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois dérivables et dont les dérivées k-ièmes sont continues sur Ω.

3.1 Notations multi-indicielles

Un multi-indice α est un d-uplet d'entiers, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. On appelle longueur de α l'entier

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

On définit la factorielle de α par $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$. Si $x \in \mathbb{R}^d$ on pose aussi $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.
Si α et β sont deux multi-indices, on dit que $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots d\}$. On pose aussi

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}.$$

Enfin, on pose :

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

Alors, une fonction $\varphi \in C^k(\Omega)$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, la fonction $\partial^\alpha \varphi$ est dans $C^0(\Omega)$.

Une formule importante est celle de Leibniz. Soient $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice α de longueur inférieure ou égale à k,

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta \varphi \cdot \partial^{\alpha-\beta} \psi.$$

Pour s'en souvenir, pensez à la formule du binôme de Newton.

3.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Voici une formule qui nous sera souvent utile dans la suite. Il faut la connaître au moins à l'ordre 1 ou 2 et à tout ordre pour $d = 1$.

Proposition 3.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $n \geq 1$ un entier et φ une fonction de classe C^n sur Ω. Soient x et y deux points de Ω tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω. Alors :*

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq n-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{n}{\alpha!}(x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{n-1} \partial^\alpha \varphi(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

Dans le cas de la dimension 1 on obtient la formule suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(x-y)^k \varphi^{(k)}(y) + (x-y)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

En dimension $d \geq 1$ et à l'ordre $n = 1$ on obtient

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

Ce sont ces deux dernières formules que l'on utilisera le plus souvent dans la suite.

3.3 Fonctions de classe C^∞ à support compact

3.3.1 Support d'une fonction continue

Définition 3.3.1. *Le support d'une fonction $\varphi \in C^0(\Omega)$ est le sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ noté* supp φ *et défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :*

1. $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$.
2. $(\operatorname{supp} \varphi)^c$ *est le plus grand ouvert où la fonction φ est nulle.*
3. $x_0 \notin \operatorname{supp} \varphi$ *si et seulement s'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que : $\forall x \in V_{x_0},\ \varphi(x) = 0$.*

On a alors :

1. $(\operatorname{supp} \varphi = \emptyset) \Leftrightarrow (\varphi \equiv 0 \text{ dans } \Omega)$,
2. $\operatorname{supp} (\varphi \cdot \psi) \subset \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \psi$,
3. si $\varphi \in C^k(\Omega)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, $\operatorname{supp} \partial^\alpha \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$.

3.3.2 Espace des fonctions test

Définition 3.3.2. *L'espace des fonctions test, noté $C_0^\infty(\Omega)$, est l'ensemble des fonctions φ de classe C^∞ telles qu'il existe un compact $K \subset \Omega$, $K = \operatorname{supp} \varphi$.*

On notera $C_K^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{supp} \varphi \subset K\}$ pour $K \subset \Omega$ un compact fixé.

Cet espace n'est pas réduit à la fonction nulle. En effet, nous pouvons construire l'exemple suivant qui est en quelque sorte l'exemple canonique à partir duquel nous pourrons construire les exemples utiles à notre propos. Dans cet exemple, $|\cdot|$ désigne une norme quelconque sur l'espace $\mathbb{R}^d$, disons la norme euclidienne pour fixer les choses.

La fonction à support compact canonique ϕ_0. On définit la fonction ϕ_0 par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \phi_0(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}) & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, elle est positive et on a $\operatorname{supp} \phi_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq 1\}$. De plus, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x) \mathrm{d}x > 0$.

Démonstration : Pour $d = 1$ on a une démonstration explicite. Pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi_0^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}}\phi_0(x).$$

En effet, $P_1 = -2X$ et $P_{n+1} = -2XP_n + P_n'(1-X^2)^2 + 4nX(1-X^2)P_n$. On vérifie ainsi que

$$\forall t \in [-1,1],\ \forall n \geq 1,\ \phi_0^{(n)}(1-t) = e\frac{P_n(1-t)}{(2+t)^2 n}\frac{1}{t^{2n}}e^{-\frac{1}{t(2+t)}}$$

et ces dérivées successives sont nulles hors de $[-1,1]$. Pour tout n, la limite de $\phi_0^{(n)}(1-t)$ lorsque t tend vers 0_+ est 0 car l'exponentielle est dominante en $+\infty$. Ainsi, on vérifie que ϕ_0' est continue par morceaux, ϕ_0' admet une limite à droite et une limite à gauche, qui sont égales à 0, aussi bien en $x = 1$ qu'en $x = -1$, donc ϕ_0 est dérivable et ϕ_0' est continue. On démontre ainsi, pour chaque n, que $\phi_0^{(n)}$ est continue. Donc ϕ_0 est indéfiniment dérivable. On peut justifier du caractère C^∞ en dimension d en utilisant le résultat en dimension 1 et en utilisant la composition des fonctions.

□

3.3.3 Topologie de $C_0^\infty(\Omega)$

Pour définir la topologie de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ nous allons définir la notion de convergence des suites d'éléments de cet espace.

Définition 3.3.3. *Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ tend vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$ lorsque :*

1. *il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$,*
2. *la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toutes les suites $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers φ et $\partial^\alpha\varphi$ sur K.*

Exemple 3.3.4. *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \phi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi(x).$$

Alors $\varphi_n \to 0$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$. En effet, si $\operatorname{supp} \phi \subset [-M, M]$, alors pour tout n, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [-M-1, M+1]$. Puis, par le théorème des accroissements finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\phi^{(k)}\left(x+\frac{1}{n+1}\right) - \phi^{(k)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}||\phi^{(k+1)}||_\infty \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini.

Pour K un compact fixé de Ω, l'espace $C_K^\infty(\Omega)$ est métrisable à l'aide d'une famille dénombrable de semi-normes. Commençons par montrer que l'ouvert Ω peut s'écrire comme une réunion croissante dénombrable de compacts.

Lemme 3.3.5. *Il existe une famille $(K_i)_{i\geq 1}$ de compacts de Ω telle que*

1. *pour tout $i \geq 1$, $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$,*
2. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i = \bigcup_{i=2}^{+\infty} \overset{\circ}{K}_i$,
3. *pour tout compact K de Ω, il existe $i_0 \geq 1$ tel que $K \subset K_{i_0}$.*

Démonstration : (Heuristique.) En effet, pour $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, on pose :

$$K_i = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ |x| \leq i\} \cap \{x \in \Omega \ : \ d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{i}\}.$$

Pour les détails, voir [7, Lemme 1.1, p2].

□

A partir de ces compacts $(K_i)_{i \geq 1}$, on peut définir, pour $i \geq 1$,

$$\begin{cases} p_{K_i}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_i} |\partial^\alpha \varphi(x)|, & \text{si} \quad \varphi \in C^k(\Omega),\ k \in \mathbb{N}, \\ p_{K_i}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq i} \sup_{x \in K_i} |\partial^\alpha \varphi(x)|, & \text{si} \quad \varphi \in C^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Chaque p_{K_i} est une semi-norme sur $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Elles induisent par restriction des semi-normes sur $C_0^k(\Omega)$ et $C_0^\infty(\Omega)$. On peut alors définir sur chacun de ces espaces la distance suivante :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_{K_i}(\varphi - \psi)}{1 + p_{K_i}(\varphi - \psi)}.$$

Les espaces $(C^k(\Omega), d)$ sont complets. De plus, si $K \subset \Omega$ est un compact, $(C_K^\infty(\Omega), d)$ est complet comme sous-espace fermé de $(C^\infty(\Omega), d)$. Toutefois $(C_0^\infty(\Omega), d)$ ne l'est pas (voir exemple 3.3.8). La distance d caractérise la convergence dans $(C_K^\infty(\Omega), d)$, mais pas dans $(C_0^\infty(\Omega), d)$. En effet, il peut y avoir des problèmes aux bords pour les supports. La distance d ne "contient" pas le point (i) de la définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Comme on peut écrire que $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{i \geq 1} C_{K_i}^\infty(\Omega)$, la topologie que l'on a définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ n'est autre que la limite inductive stricte des topologies définies par la distance ci-dessus sur chaque $C_{K_i}^\infty(\Omega)$. Toutefois, $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas métrisable, seul chacun des $C_{K_i}^\infty(\Omega)$ l'est (voir [2], Proposition 1.5).

3.3.4 Fonctions "pic" et "plateau"

Fonctions "pic".

Proposition 3.3.6. *Soit $x_0 \in \Omega$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$. Alors, il existe une fonction $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ positive, de support inclus dans $B(x_0, \varepsilon)$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ égale à 1. Une telle fonction ρ est appelée fonction pic sur la boule $B(x_0, \varepsilon)$.*

Démonstration : En effet, considérons la fonctions définie sur Ω par

$$\forall x \in \Omega,\ \rho_0(x) = \frac{\phi_0(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x) \mathrm{d}x}$$

puis posons

$$\forall x \in \Omega,\ \rho(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho_0 \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \right).$$

La fonction ρ ainsi définie convient.

□

En dimension $d = 1$ on peut aussi donner une formule explicite pour une fonction pic sur un intervalle quelconque $[a, b]$ non réduit à un singleton. Une fonction C_0^∞ dont le support est $[a, b]$ est

$$\frac{2}{b-a}\phi_0\left(-1+\frac{2(x-a)}{b-a}\right).$$

En particulier, une fonction dont le support est $[-\varepsilon, \varepsilon]$ est $\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(\frac{x}{\varepsilon})$. On note enfin un résultat que l'on a déjà utilisé au chapitre précédent. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction continue et bornée ϕ,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\phi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(t)\phi(\varepsilon t)dt$$

d'où la convergence de cette suite, lorsque ε tend vers 0, vers $\phi(0)\int_{-1}^{1}\phi_0(t)dt$. On utilise ici le TCD.

Fonctions "plateau".

On commence par le cas de la dimension $d = 1$. Tout d'abord, il existe une fonction "marche" de classe C^∞ qui passe de la valeur 0 sur $]-\infty, -1]$ à 1 sur $[1, +\infty[$. On peut prendre par exemple

$$\psi_0 : x \mapsto \frac{\int_{-1}^{x}\phi_0(t)dt}{\int_{-1}^{1}\phi_0(t)dt}.$$

Puis, à partir de cette "marche", on construit une fonction C_0^∞, dont le support compact est $[a, b]$, identiquement égale à 1 sur $[c, d]$, $a < c < d < b$ et comprise entre 0 et 1. Une telle fonction peut être définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ l_0(x) = \begin{cases} \psi_0(-1+\frac{2(x-a)}{c-a}) & \text{si} \quad x \le \frac{c+d}{2} \\ \psi_0(-1+\frac{2(b-x)}{b-d}) & \text{si} \quad x \ge \frac{c+d}{2}. \end{cases}$$

En effet, sur $[c, \frac{c+d}{2}]$, la fonction l_0 est identiquement égale à 1, ainsi que sur $[\frac{c+d}{2}, d]$, ce qui implique le caractère C^∞ au point $\frac{c+d}{2}$. Cette fonction est appelée "plateau" sur $[c, d]$ supporté par $[a, b]$.

Le résultat persiste en dimension d quelconque.

Proposition 3.3.7. *Soit K un compact de Ω et $\mathcal{O}$ un ouvert tel que $K \subset \mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Il existe alors $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur K, $\chi \equiv 0$ sur $\mathcal{O}^c$ et $0 \le \chi \le 1$.*

Démonstration : (Heuristique.) Soit $\varepsilon > 0$. Soit ρ_ε une fonction pic sur la boule $B(0, \varepsilon)$. Soit $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ d(x, K) \le \varepsilon\}$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \theta_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_{K_\varepsilon}(y)\mathrm{d}y.$$

Alors θ_ε est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, telle que $0 \le \theta_\varepsilon \le 1$, $\theta_\varepsilon = 1$ sur K et $\theta_\varepsilon = 0$ sur $K_{2\varepsilon}^c$. (pour le caractère C^∞, propriété de convolution). Par ailleurs, il existe $\varepsilon_0 \in]0, 1[$ tel que $K \subset K_{2\varepsilon_0} \subset \mathcal{O}$. Alors la fonction θ_{ε_0} convient. Pour plus de détails, consulter [7, Théorème 2.6, p10].

□

Exemple 3.3.8. *Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et soit χ_n une fonction plateau valant 1 sur $[-n, n]$ et 0 hors de $[-2n, 2n]$. Alors, la suite $(\chi_n f)$ est de Cauchy dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, elle converge vers f simplement, mais comme f n'est pas dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, elle ne converge pas dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ vers f. Cela montre au passage que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ muni de la distance (ou plutôt de son prolongement) que nous avions définie sur $C_K^\infty(\Omega)$ n'est pas complet.*

3.4 Densité par troncature et régularisation

Dans cette partie, nous allons montrer que l'espace des fonctions test $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'espace des fonctions continues ou dans les espaces L^p. Cela permettra ensuite, lorsque l'on voudra démontrer un résultat dans ces espaces, de le démontrer tout d'abord pour des fonctions test puis d'étendre le résultat recherché par un argument de densité (et donc par approximation).

3.4.1 Troncature

Nous allons montrer ici que le fait de se restreindre, dans un espace de fonctions d'une régularité donnée, aux fonctions à support compact, n'est pas une restriction importante, dans le sens où on définit alors un sous-espace dense dans l'espace de départ.

Proposition 3.4.1.

1. *Pour* $1 \leq p < +\infty$, *l'espace* $L^p_c(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ : \ u = 0$ *hors d'un compact* $\}$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.
2. *Pour* $0 \leq k \leq +\infty$; $C_0^k(\Omega)$ *est dense dans* $C^k(\Omega)$.

Démonstration : On commence par décomposer Ω en $\Omega = \bigcup_{i\geq 1} K_i$ avec K_i compact et $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$.

On considère la fonction plateau φ_i qui vaut 1 sur K_i et 0 dans $(\overset{\circ}{K}_{i+1})^c$.

1. Soit $u \in L^p(\Omega)$. On pose, pour tout $i \geq 1$, $u_i = \varphi_i u$ (troncature). Alors $u_i \in L^p_c(\Omega)$ car $|u_i| \geq |u|$ et $|u|$ est nulle en dehors de K_{i+1}. A l'aide du TCD, nous allons montrer que la suite $(u_i)_{i\geq 1}$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$. Soit $x \in \Omega$. On a : $|u_i(x) - u(x)|^p = |u(x)|^p|1-\varphi_i(x)|^p$. Il existe i_0 tel que $x \in K_{i_0}$ et, si $i \geq i_0$, alors $K_{i_0} \subset K_i$ et $\varphi_i(x) = 1$. Donc, pour presque tout $x \in \Omega$, $|u_i(x) - u(x)|^p \to 0$ lorsque i tend vers l'infini (cette suite est même nulle à partir d'un certain rang). Comme de plus $|u_i(x) - u(x)|^p \leq |u(x)|^p$ et que $u \in L^p(\Omega)$, on peut appliquer le TCD pour obtenir la convergence voulue dans $L^p(\Omega)$.

2. On reprend la même idée de troncature et, si $u \in C^k(\Omega)$, on pose $u_i = \varphi_i u$. Alors $u_i \in C_0^k(\Omega)$. Soit $l \in \mathbb{N}$. On montre que $p_{K_l}(u_i - u) \to 0$ lorsque i tend vers l'infini. Par la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(u_i - u) = \partial^\alpha((\varphi_i - 1)u) = (\varphi_i - 1)\partial^\alpha u + \sum_{\beta\leq\alpha, \beta\neq 0} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta \varphi_i \cdot \partial^{\alpha-\beta} u.$$

D'où,

$$\begin{aligned} p_{K_l}(u_i - u) &= \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{x\in K_l} |\partial^\alpha(u_i - u)| \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq l} \sup_{x\in K_l} |\varphi_i - 1| \sup_{x\in K_l} |\partial^\alpha u| + \sum_{|\alpha|\leq l} \sum_{\beta\leq\alpha,\beta\neq 0} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \sup_{x\in K_l} |\partial^\beta \varphi_i| \sup_{x\in K_l} |\partial^{\alpha-\beta} u|. \end{aligned}$$

Or, pour $i \geq l+1$, $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1} \subset K_i$ et $\varphi_i = 1$ sur K_l. Le sup et le premier terme ci-dessus sont donc nuls. De plus, comme une constante est de dérivée nulle, on a aussi que $\partial^\beta \varphi_i$ est nulle sur K_l pour $\beta \neq 0$. Ainsi la seconde somme est elle aussi nulle. Donc pour $i \geq l+1$, $p_{K_l}(u_i - u) = 0$ et l'on obtient le résultat voulu.

□

Nous devons maintenant montrer que l'on peut approcher des fonctions d'une régularité donnée par des fonctions de classe C^∞. Pour cela nous allons devoir faire des rappels sur la convolution des fonctions classiques. Ces rappels nous resserviront aussi pour mieux comprendre la convolution des distributions.

3.4.2 Produit de convolution

On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. On veut définir le **produit de convolution** de deux fonctions f et g par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Dans le cas de fonctions f et g positives, leur mesurabilité suffit pour que cette formule ait un sens. Sans cette hyptohèse de positivité, on peut encore définir le produit de convolution de f et de g à condition de supposer, en plus de leur mesurabilité, une régularité L^p.

Proposition 3.4.2. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable. Alors le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \ \|g\|_1 .$$

De plus, $f * g = g * f$.

Démonstration : Voir [5].

□

La dérivée se comporte bien vis-à-vis du produit de convolution. C'est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Proposition 3.4.3. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que f est de classe C^k et que ses dérivées partielles de tous ordres sont bornées. Alors $f * g$ est de classe C^k et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

Démonstration : Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, la fonction $x \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $C^k(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_x^\alpha (f(x-y)g(y))| = |(\partial^\alpha f)(x-y)g(y)| \leq ||\partial^\alpha f||_\infty \cdot |g(y)|.$$

Comme $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir le résultat.

□

Proposition 3.4.4. *Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Soient A et B deux réels tels que supp $\varphi \subset B(0, A)$ et $f(y) = 0$ pour $|y| \geq B$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $|x| > A + B$. Comme dans l'intégrale qui définie $\varphi * f$ on peut supposer que $x - y \in$ supp φ, on a $|x-y| \leq A$. Alors, $|y| \geq |x| - |x-y| > A + B - A = B$. Donc $f(y) = 0$. D'où, $(\varphi * f)(x) = 0$ pour tout x tel que $|x| > A + B$. Donc supp $(\varphi * f) \subset B(0, A+B)$.

□

3.4.3 Régularisation

Nous allons utiliser les résultats précédents pour montrer que l'on peut "régulariser" une fonction non régulière en la "convolant" par une fonction régulière. On commence par considérer une fonction "pic" ρ dont le support est inclus dans $B(0,1)$ et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ vaut 1. Pour $\varepsilon > 0$, on pose : $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-d}\rho(\varepsilon^{-1}\cdot)$. La suite (ρ_ε) est appelée une "approximation de l'unité".

Proposition 3.4.5.

1. *Si $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$, $(\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u))$ converge vers $\partial^\alpha u$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*
2. *Si $u \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$, $(\rho_\varepsilon * u)$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varepsilon \to 0$, pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Remarque 3.4.6. *Pour comprendre, on peut dessiner le "filtre" $\rho_\varepsilon *$ au voisnage de chaque point x, filtre qui s'affine de plus en plus lorsque ε tend vers 0.*

Démonstration : **1.** On suppose $|\alpha| \leq k$. Comme $\int \rho = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x) &= (\rho_\varepsilon * \partial^\alpha u)(x) - \partial^\alpha u(x) \\
&= \varepsilon^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\partial^\alpha u(y)\mathrm{d}y - \partial^\alpha u(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\partial^\alpha u(x-\varepsilon z)\mathrm{d}z - \partial^\alpha u(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)(\partial^\alpha u(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha u(x))\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Or, $\partial^\alpha u$ est continue à support compact car $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$ donc elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$: $\forall \delta > 0,\ \exists \eta(\alpha,\delta) > 0,\ \forall x, x',\ |x - x'| < \eta(\alpha,\delta) \Rightarrow |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x')| \leq \delta$. Fixons $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min_{|\alpha|\leq k} \eta(\alpha,\delta) = \eta_\delta$. Alors, $|x - \varepsilon z - x| \leq \varepsilon|z| < \eta_\delta$ sur le support de ρ (qui est inclus dans $B(0,1)$, d'où le $|z| \leq 1$). Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)|\partial^\alpha u(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha u(x)|\mathrm{d}z \leq \delta,$$

toujours car $\int \rho = 1$. D'où la convergence uniforme voulue.

2. Soit q l'exposant associé à p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)^{1/q}\rho(z)^{1/p}|u(x-\varepsilon z) - u(x)|\mathrm{d}z \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)\mathrm{d}z\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)|u(x-\varepsilon z) - u(x)|^p\mathrm{d}z\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

On élève les deux membres à la puissance p et on intègre en x sur $\mathbb{R}^d$. Alors, par Fubini,

$$||\rho_\varepsilon * u(x) - u(x)||_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)||u(\cdot - \varepsilon z) - u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p\mathrm{d}z.$$

Comme $|z| \leq 1$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on $||u(\cdot - \varepsilon z) - u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (résultat classique d'intégration). Comme de plus, $\rho(z)||u(\cdot - \varepsilon z) - u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \leq 2^p||u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p\rho(z)$ et que ρ est intégrable, on peut appliquer le TCD pour obtenir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)||u(\cdot - \varepsilon z) - u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p\mathrm{d}z = 0$$

et ainsi $||\rho_\varepsilon * u(x) - u(x)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$. D'où le résultat voulu.

□

Nous pouvons enfin démontrer le résultat de densité annoncé en introduction.

Théorème 3.4.7. *$C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C^k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration : Par la proposition 3.4.1, il suffit de montrer que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans les espaces $C_0^k(\Omega)$ et $L_c^p(\Omega)$. Ecrivons la preuve pour $C_0^k(\Omega)$, celle pour $L_c^p(\Omega)$ étant exactement la même. Soit K un compact de Ω tel que $u = 0$ dans K^c. Soit $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 à tout $\mathbb{R}^d$. Alors $\tilde{u} \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\tilde{u}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{u}$. Posons enfin $u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon|_\Omega$. On a supp $\tilde{u}_\varepsilon \subset K_\varepsilon = K + \overline{B(0,\varepsilon)}$. Pour ε assez petit, $K_\varepsilon \subset \Omega$ et c'est un compact. Alors, d'après la proposition 3.4.4, $\tilde{u}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ et $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Or, par la proposition 3.4.3, $(\tilde{u}_\varepsilon)$ tend vers $\tilde{u}$ pour la topologie de $C^k(\mathbb{R}^d)$: si (K_i) est une exhaustion de Ω, pour tout i, $p_{K_i}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Or, pour tout i, $p_{K_i}(\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}) = p_{K_i}(u_\varepsilon - u)$, donc (u_ε) tend vers u dans $C_0^k(\Omega)$, donc $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $C_0^k(\Omega)$.

□

3.5 Application : Lemme de Dubois-Reymond

Ce résultat aura son importance théorique dans le prochain chapitre.

Lemme 3.5.1. *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On suppose que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Alors $f = 0$ presque partout.*

Démonstration : Tout d'abord, on écrit que Ω est réunion dénombrable d'ouverts $\omega_n \subset \Omega$ tels que $\overline{\omega_n}$ soit un compact de Ω. Il suffit pour cela de prendre :

$$\omega_n = \left\{ x \in \Omega \ : \ |x| \leq n \text{ et } d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Il suffit donc de montrer que $f = 0$ pp sur un ouvert $\omega \subset \Omega$ tels que $\overline{\omega}$ soit un compact de Ω. Soit $g = f|_\omega \in L^1(\omega)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 3.4.7, il existe $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\omega)$ telle que $||g - \psi_\varepsilon||_{L^1(\omega)} \leq \varepsilon$. On a alors

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega), \ \int_\omega \psi_\varepsilon \varphi = \int_\omega (\psi_\varepsilon - g)\varphi + \int_\omega g\varphi = \int_\omega (\psi_\varepsilon - g)\varphi + 0$$

car $\int_\omega g\varphi = \int_\Omega f\varphi$. D'où

$$\left| \int_\omega \psi_\varepsilon \varphi \right| \leq \int_\omega |\psi_\varepsilon - g| \cdot |\varphi| \leq \varepsilon ||\varphi||_\infty.$$

Soit $\delta > 0$. On prend pour φ la fonction particulière définie par : $\varphi = \frac{\overline{\psi_\varepsilon}}{\sqrt{\delta^2 + |\psi_\varepsilon|^2}} \in C_0^\infty(\omega)$. On a $|\varphi| \leq 1$ et $\psi_\varepsilon \varphi = \frac{|\psi_\varepsilon|^2}{\sqrt{\delta^2 + |\psi_\varepsilon|^2}}$. Donc,

$$\forall \delta > 0, \ \int_\omega \frac{|\psi_\varepsilon|^2}{\sqrt{\delta^2 + |\psi_\varepsilon|^2}} \leq \varepsilon.$$

En appliquant le TCD on peut faire tendre $\delta \to 0$ pour obtenir $\int_\omega |\psi_\varepsilon| \leq \varepsilon$. D'où,

$$||g||_{L^1(\omega)} \leq ||g - \psi_\varepsilon||_{L^1(\omega)} + ||\psi_\varepsilon||_{L^1(\omega)} \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Donc $||g||_{L^1(\omega)} = 0$ et g est nulle pp sur ω. Par recollement dénombrable on en déduit que f est nulle pp sur Ω.

$\square$

Chapitre 4

Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

La théorie des distributions a été introduite par Laurent Schwartz en 1945, posant les idées qui étaient déjà en germe chez Sobolev dans les années 30. La représentation des phénomènes physiques étendus dans l'espace par des fonctions de plusieurs variables et l'expression des lois physiques en termes d'équations aux dérivées partielles ont été un grand progrès dans l'étude de ces phénomènes. Toutefois, cette représentation par une fonction assignant une valeur en chaque point pose au moins deux problèmes d'ordre physique.

Le premier est que les quantités physiques *en un point* n'ont pas de sens. Par exemple, la température est une conséquence du mouvement des molécules. Dans un volume plus petit que le libre parcours moyen d'une molécule, parler de température en un point précis ne signifie donc rien. Pourtant, l'équation de la chaleur classique donne, à l'échelle macroscopique, des résultats qui sont conformes aux expériences.

Le second est qu'une valeur ponctuelle pour une quantité physique est impossible à mesurer avec un appareil de mesure. Ce dernier a nécessairement une certaine étendue spatiale et ne pourra donc jamais fournir une valeur $f(x_0)$ d'une fonction f en un point x_0. Le mieux que l'on puisse obtenir est une moyenne pondérée $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ où φ caractérise l'appareil de mesure et est supportée au voisinage de x_0 avec une intégrale proche de 1 pour un appareil précis et bien réglé.

Dans ce chapitre nous allons systématiser l'idée qui consiste à ne plus considérer des fonctions définies point par point, mais globalement, par des moyennes locales. Nous allons donc substituer aux fonctions classiques des formes linéaires sur l'espace des fonctions test. Nous avons déjà vu cette idée se dessiner dans le chapitre 2.

Un des buts de cette théorie est d'apporter un sens à des objets abstraits comme l'impulsion de Dirac, mais aussi de pouvoir "dériver" des fonctions qui ne sont pas dérivables, comme par exemple des fonctions L^1 ou L^2 ou seulement continues. Nous verrons comment cela peut nous aider à résoudre des problèmes d'EDP qui n'ont pas a priori de solutions classiques simples.

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

4.1 Définitions

Nous allons donner deux définitions équivalentes de la notion de distribution, l'une fonctionnelle et théorique dans laquelle la continuité est exprimée topologiquement, une autre effective dans laquelle la continuité est exprimée directement par des estimations.

4.1.1 Définition fonctionnelle

Définition 4.1.1. *Une distribution sur l'ouvert Ω est une forme linéaire $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ continue en* 0, i.e. *telle que, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers* 0, $< T, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. *On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.*

Le symbole $< T, \varphi_n >$ désigne ici un crochet de dualité, il signifie simplement l'action de T sur $\varphi_n : T(\varphi_n)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ n'est autre que le dual topologique de $C_0^\infty(\Omega)$.
La convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ étant une condition très contraignante, la condition de continuité vis-à-vis de cette topologie est très forte et cela impliquera donc de nombreuses propriétés pour les distributions.
Cette définition abstraite des distributions pourra être utilisée pour des questions théoriques, mais pour montrer en pratique qu'une forme linéaire sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution, nous lui préfèrons la définition qui suit.

4.1.2 Définition par l'ordre

Proposition 4.1.2. *Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si, pour tout compact K de Ω, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C_{K,m} > 0$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que* supp $\varphi \subset K$,

$$| < T, \varphi > | \leq C_{K,m} \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Notation. On pourra noter $p_m(\varphi) = \max_{|\alpha|\leq m} \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.

Démonstration : Supposons que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Fixons un compact $K \subset \Omega$ sur lequel :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \exists \varphi \in C_K^\infty(\Omega), \ | < T, \varphi > | > C p_m(\varphi).$$

Prenons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $C = m$. Il existe alors $\varphi_m \in C_K^\infty(\Omega)$, $| < T, \varphi_m > | > m p_m(\varphi_m)$. Posons $\tilde{\varphi}_m = \frac{\varphi_m}{< T, \varphi_m >}$. Alors, $< T, \tilde{\varphi}_m >= 1$ et supp $\tilde{\varphi}_m \subset K$. De plus,

$$p_m(\tilde{\varphi}_m) = \frac{p_m(\varphi_m)}{< T, \varphi_m >} < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall m \geq k$, $p_k(\tilde{\varphi}_m) \leq p_m(\tilde{\varphi}_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Cela signifie exactement que la suite $(\tilde{\varphi}_m)$ tend vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Or, $< T, \tilde{\varphi}_m >= 1$ ne tend pas vers 0 ce qui contredit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Montrons la réciproque. Soit (φ_n) une suite qui converge vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Soit K un compact qui contient tous les supp φ_n. Par définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors : $| < T, \varphi_n > | \leq C_{K,m} p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

□

Cette caractérisation des distributions sera constamment utilisée par la suite. Elle mène aussi directement à la notion d'ordre d'une distribution.

4.1.3 Ordre d'une distribution

Dans la définition d'une distribution, l'entier m dépend a priori du choix du compact K. Si on peut trouver un entier m qui convient pour tous les compacts K de Ω, on dira que la distribution est d'ordre fini.

Définition 4.1.3. *Une forme linéaire T sur $C_0^\infty(\Omega)$ est une distribution* ***d'ordre fini au plus m*** *sur Ω lorsqu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathrm{supp}\ \varphi \subset K$,*

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Le plus petit entier m possible est appelé l'ordre de la distribution T.

L'ordre de T est le plus petit nombre de dérivées qu'il nous faut pour contrôler l'action de T sur les fonctions test.
Nous allons maintenant donner quelques exemples de distributions en précisant à chaque fois leur ordre.

4.2 Premiers exemples

4.2.1 Distribution associée à une fonction L^1_{loc}

Une des premières choses à vérifier est que la théorie des distributions généralise bien la théorie des fonctions classiques, typiquement des fonctions intégrables. On va donc montrer comment les fonctions $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ s'injectent dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 4.2.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On peut lui associer une distribution sur $C_0^\infty(\Omega)$, notée T_f, telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < T_f, \varphi >= \int_\Omega f \varphi \mathrm{d}x.$$

Cette distribution est d'ordre 0.

Démonstration : Tout d'abord, on vérifie que, comme f est $L^1_{loc}(\Omega)$, sa restriction à tout compact est L^1. Ainsi, sur le support de $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, elle est L^1. Comme φ est bornée, car continue sur le compact où elle est supportée, on en déduit que $f\varphi$ est L^1, et que

$$\left| \int_\Omega f \varphi \mathrm{d}x \right| \leq \max_{x \in \mathrm{supp}\ \varphi} |\varphi(x)| \int_{\mathrm{supp}\ \varphi} |f| \mathrm{d}x.$$

La forme linéaire $\varphi \to \int_\Omega f \varphi dx$ est donc bien une distribution, qui plus est d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0.

□

Par ailleurs, le lemme de Dubois-Reymond nous permet d'identifier T_f à la fonction f de manière unique. L'application $f \mapsto T_f$ est une injection de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans la suite nous ferons donc presque toujours l'abus de langage qui consiste à identifier T_f à f. Nous écrirons par exemple "soit f la distribution...".

4.2.2 Distribution de Dirac

Nous avons déjà rencontré cette distribution au chapitre 2. Nous allons maintenant en donner sa définition précise.

Définition 4.2.2. *Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_a : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

est une distribution sur Ω, d'ordre 0.

Démonstration : Soit K un compact de Ω et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que supp $\varphi \subset K$. Alors, $| < \delta_a, \varphi > | \leq 1 \cdot ||\varphi||_\infty$. Donc δ_a est une distribution d'ordre au plus 0 donc 0 sur Ω.

□

La distribution de Dirac est un nouvel objet de la théorie des distributions. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Si cela était le cas, en fixant un compact $K \subset \Omega$, on aurait :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ supp } \varphi \subset K, < \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = \int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Alors, si $a \notin$ supp φ, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Par le lemme de Dubois-Reymond, $f = 0$ pp sur $\Omega \setminus \{a\}$, donc sur Ω. Mais alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_K 0 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = 0 = \varphi(a)$. En choisissant φ telle que $\varphi(a) \neq 0$ on aboutit à une contradiction.

4.2.3 Distribution de Dirac dérivée

Nous pouvons aussi définir sur le modèle de la distribution de Dirac une distribution d'ordre fini de n'importe quel ordre. Soient $a \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Posons, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$< T, \varphi >= \partial^\alpha \varphi(a).$$

Montrons que T ainsi définie est une distribution d'ordre exactement $|\alpha|$. Tout d'abord, il est clair que c'est bien une distribution d'ordre au plus $|\alpha|$. En effet, si K est un compact de Ω, on a

$$| < T, \varphi > | = |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq ||\partial^\alpha \varphi||_\infty.$$

Soit $k < |\alpha|$. Montrons que T n'est pas d'ordre k. On raisonne par l'absurde. Supposons que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \text{ supp } \varphi \subset K, |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq C_K \max_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta \varphi||_\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et prenons comme compact $K = \overline{B(a, \varepsilon)}$. Fixons $\psi_0 \in C_0^\infty(B(0, \varepsilon))$ telle que $\psi_0(x) = 1$ pour $|x| \leq \varepsilon/2$. Posons alors $\psi(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi_0(x)$. Par la formule de Leibniz, on a $\partial^\alpha \psi(0) = \psi_0(0) = 1$. Posons enfin $\varphi(x) = \psi(\lambda(x-a))$ où $\lambda \geq 1$. Comme supp $\varphi \subset B(a, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \subset B(a, \varepsilon) \subset K$, on a bien supp $\varphi \subset K$. De plus, $\partial^\alpha \varphi(a) = \lambda^{|\alpha|}\partial^\alpha \psi(0) = \lambda^{|\alpha|}$. Pour $|\beta| \leq k$,

$$|\partial^\beta \varphi(x)| = \lambda^{|\beta|}|\partial^\beta \psi(\lambda(x-a))| \leq \lambda^k ||\partial^\beta \psi||_\infty.$$

Alors, pour tout $\lambda \geq 1$, on devrait avoir,

$$\lambda^{|\alpha|-k} \leq C_K \max_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta \psi||_\infty < +\infty.$$

On aboutit à une contradiction en faisant tendre λ vers $+\infty$ puisque $|\alpha| - k \geq 1$. Donc T ne peut pas être d'ordre $k < |\alpha|$, donc T est d'ordre exactement $|\alpha|$.

4.2.4 Mesures de Radon

Soit μ une mesure de Radon sur Ω. La forme linéaire $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \mapsto \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu$ est une distribution d'ordre 0 sur Ω.

Théorème 4.2.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre 0. Alors, il existe une mesure de Radon μ sur Ω telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < T, \varphi >= \int_\Omega \varphi \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration : On admettra ce théorème. La démonstration se base sur le fait que les mesures de Radon positives sur Ω s'identifient aux formes linéaires positives sur $C_0(\Omega)$ par

$$\mu \mapsto \left(f \in C_0(\Omega) \mapsto \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \right).$$

C'est le théorème de représentation de Riesz.

□

4.2.5 Distributions positives

On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est positive lorsque :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0 \ \Rightarrow < T, \varphi > \geq 0.$$

Montrons que toute distribution positive est d'ordre 0.

En effet, soit K un compact de Ω et soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ sur K et $0 \leq \chi \leq 1$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \subset K$ et φ réelle, alors les fonctions $\psi_\pm : x \mapsto \chi(x) \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \pm \varphi(x)$ sont dans $C_0^\infty(\Omega)$ et sont positives. Alors, $< T, \psi_\pm > \geq 0$. D'où,

$$| < T, \varphi > | \leq | < T, \chi > | \cdot \sup_{x \in K} |\varphi(x)| = C_K \sup_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

ce qui signifie que T est d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0.

4.2.6 La valeur principale de $\frac{1}{x}$

La fonction inverse, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, on ne peut donc pas définir à partir de cette fonction une distribution comme on l'a fait auparavant. Cependant, en prenant garde à éviter la singularité en 0 et en effectuant une intégration "symétrique" par rapport à 0, on va tout de même pouvoir associer une distribution à f.

Définition 4.2.4. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose*

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Alors vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ *est une distribution sur* $\mathbb{R}$ *d'ordre exactement* 1.

Démonstration : Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et supposons que $K \subset [-a, a]$ pour a un réel positif. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que supp $\varphi \subset K$. Alors,

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| \leq a} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Pour "annuler" la singularité en 0, l'idée est de faire un développement de Taylor de φ en 0. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x),\ \text{avec}\ \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t,\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R})\ \text{et}\ |\psi(x)| \leq ||\varphi'||_\infty.$$

On écrit alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon<|x|\leq a} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \varphi(0)\int_{\varepsilon<|x|\leq a} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon<|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x := I_1 + I_2.$$

Par imparité de la fonction f et symétrie par rapport à 0 du domaine d'intégration, l'intégrale I_1 est nulle. Dans l'intégrale I_2, la fonction ψ étant continue en 0, on peut appliquer le TCD pour obtenir que la limite lorsque ε tend vers 0 de I_2 existe et vaut $\int_{|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x$. La définition de vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc justifiée, la limite existe et on a :

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_{|x|\leq a} \psi(x)\mathrm{d}x.$$

De plus,

$$\left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq 2a \times \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|.$$

On en déduit que vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre au plus 1. Il nous reste à justifier qu'elle ne peut pas être d'ordre 0. Si elle était d'ordre 0 on aurait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset K,\ \left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq C||\varphi||_\infty.$$

Pour $n \geq 1$, on considère la fonction plateau qui vaut 1 sur le compact $[\frac{1}{n}, 1]$ et qui est nulle hors de l'ouvert $]\frac{1}{2n}, 2[$. Alors, $||\varphi_n||_\infty = 1$ et, pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$, on a (par positivité de φ_n)

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log n.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\log n \leq \left|\left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq C||\varphi_n||_\infty = C.$$

D'où la contradiction lorsque $n \to \infty$.

□

Comme vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1 on en déduit en particulier qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que vp $\left(\frac{1}{x}\right) = T_f$.
Cette distribution apparaîtra à nouveau plus loin dans le cours et en TDs. Tout comme la distribution de Dirac, elle constitue un des premiers exemples d'objets nouveaux introduits par la théorie des distributions.

4.2.7 Partie finie de x^α

On peut chercher à continuer à intégrer des fonctions non intégrables, par exemple x^α pour $-2 < \alpha < -1$ et $x > 0$. On vérifie que

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(0)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^a x\varphi'(0)\mathrm{d}x + ...$$

(sans préciser le reste de Taylor). Le premier terme vaut $\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Il s'agit de la partie infinie de x^α. Plus précisément, on a l'égalité, valable pour φ à support compact et $a \notin \mathrm{supp}\varphi$:

$$\int_\varepsilon^a x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(x)\right]_\varepsilon^a - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^a \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ est, quant à elle, intégrable car $\alpha + 1 > -1$, donc définit une distribution. On voit donc apparaitre la partie finie.

Définition 4.2.5. *La partie finie de x^α, notée $\mathrm{Pf}(x^\alpha)$ est la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(\varepsilon)\right) = -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

On peut définir de même $\mathrm{Pf}(x^\alpha)$ pour $\alpha \in]-n-1, -n[$, grâce à

$$< \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >= (-1)^n \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)...(\alpha+n)}\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x.$$

Il existe d'autres façons de définir les parties finies. Par exemple, lorsque $-n-1 < \alpha < -n$, $n \geq 1$, on retranche la partie infinie obtenue en écrivant le développement de Taylor de φ à l'ordre $n-1$, soit

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!}\varphi^{(j)}(0) + x^n \psi_n(x)$$

et on calcule ainsi la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, de

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^{\alpha+j+1}}{(j+\alpha+1)j!}\varphi^{(j)}(0).$$

Cette limite est notée $< \mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi >$ et définit une distribution d'ordre n. Les cas $\alpha = -n$ donnent les valeurs principales. Par exemple, pour $\alpha = -2$, en pensant à intégrer de manière symétrique comme pour la valeur principale de $\frac{1}{x}$, on obtient

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} = \int_\varepsilon^\infty \int_0^1 (1-t)[\varphi''(xt) + \varphi''(-xt)]\mathrm{d}t.$$

Le membre de droite définit, à la limite $\varepsilon \to 0$, une distribution d'ordre 2, qui est la partie finie de $\frac{1}{x^2}$ en valeur principale.

4.2.8 Un exemple de distribution d'ordre infini

Soit T la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < T, \varphi >= \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j).$$

Alors, T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini. On peut reprendre en l'adaptant légèrement la preuve donné pour la distribution de Dirac dérivée.
Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supp $\varphi \subset [-a, a]$. Posons $p_0 = E(a) + 1$, où $E(a)$ est la partie entière de a. On a :

$$| < T, \varphi > | = \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi^{(j)}(j) \right| = \left| \sum_{j=0}^{p_0} \varphi^{(j)}(j) \right| \leq \sum_{j=0}^{p_0} ||\varphi^{(j)}||_\infty.$$

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m. Soit $\psi_0 \in C_0^\infty(]-1/2, 1/2[)$, égale à 1 sur $[-1/4, 1/4]$ et positive. Soit $\lambda > 1$. Posons $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \psi(\lambda(x - (m+1)))$. On considère le compact $K = [m + 1/2, m + 3/2] \subset \mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et elle est C^∞.
D'autre part, par la formule de Leibniz, on a : $\psi^{(m+1)}(0) = \psi_0(0) = 1$. Puis, comme supp $\varphi \subset K$, on a $< T, \varphi >= \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}$. D'autre part, pour $j \leq m$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty.$$

Or, T est supposée d'ordre m, donc pour $K = [m + 1/2, m + 3/2]$, il existe $C_K > 0$ telle que

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \sum_{j=0}^{m} ||\varphi^{(j)}||_\infty,$$

soit ici :

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty \leq C_K \left(\sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty \right) \lambda^m.$$

Or cela conduit à une contradiction lorsque λ tend vers l'infini car on a :

$$\lambda \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty < +\infty.$$

Donc T ne peut être d'ordre fini.

4.3 Convergence des suites de distributions

Nous allons voir que les suites de distributions étant des suites d'applications linéaires continues, elles se comportent de manière très "simple". Cela est principalement dû au théorème de Banach-Steinhaus qui est un résultat d'uniformisation des bornes sur les familles de formes linéaires continues sur un espace de Banach (voir [5], Chapitre 17). Commençons par donner la définition de la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 4.3.1. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de distributions sur Ω converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque, pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\lim_{n \to \infty} < T_n, \varphi >=< T, \varphi > .$$

Exemple 4.3.2. *La suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$, converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers $-2\delta_0'$. En effet, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\mathrm{d}u$. Alors,*

$$< T_n, \varphi >= n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\psi(0) = 2\varphi'(0).$$

D'où le résultat.

Exemple 4.3.3. *La suite $(T_{e^{in\cdot}})_{n\geq 0}$ converge vers la distribution nulle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il s'agit juste du lemme de Riemann-Lebesgue.*

Proposition 4.3.4. *La convergence dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $K \subset \Omega$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi \subset K$. Par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} | < T_{f_n}, \varphi > - < T_f, \varphi > | &= | < T_{f_n} - T_f, \varphi > | \leq \int_K |f_n(x) - f(x)| \cdot |\varphi(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq ||f_n - f||_{L^p(K)} ||\varphi||_{L^q(K)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

Exemple 4.3.5. *La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, considérons la suite de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ définie par $f_n : x \mapsto \sqrt{n}e^{-nx^2}$. Alors, pour tout $x \neq 0$, $f_n(x) \to 0$, mais la suite $(T_{f_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $\sqrt{\pi}\delta_0$ et non pas vers la distribution nulle. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a par le TCD,*

$$< f_n, \varphi >= \sqrt{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{\pi}\varphi(0) =< \sqrt{\pi}\delta_0, \varphi > .$$

On a le théorème suivant dont la démonstration (difficile et basée sur Banach-Steinhaus) est admise ici (voir [1, C.3.4, p245] ou [7, p58]).

Théorème 4.3.6 (Admis). *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions telle que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, la suite $(< T_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$. Alors la forme linéaire T définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < T, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} < T_n, \varphi >$$

est une distribution sur Ω. De plus, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}\ \varphi \subset K,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} | < T_n, \varphi > | \leq C p_m(\varphi).$$

Le point clé ici est le fait que l'on peut trouver une constante $C > 0$ et un entier $m \in \mathbb{N}$ indépendants de n. On a aussi le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.7. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$. Alors $< T_n, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} < T, \varphi >$.*

Nous allons montrer au chapitre sur la convolution des distributions que toute distribution est limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une suite de fonctions dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Nous terminons cette section par un résultat d'approximation de la distribution de Dirac en 0 par des fonctions L^1.

Proposition 4.3.8. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, dont les supports sont contenus dans des boules centrées à l'origine et de rayon tendant vers 0. Alors*

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} f_n \mathrm{d}x} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration : Soit a_n le rayon de la boule, $a_n \to 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En posant $x = a_n t$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ < f_n, \varphi >= a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\varphi(a_n t)\mathrm{d}t.$$

On écrit

$$\frac{< f_n, \varphi >}{< f_n, 1 >} - \varphi(0) = \frac{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)(\varphi(a_n t) - \varphi(0))\mathrm{d}t}{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\mathrm{d}t}.$$

On utilise ensuite le fait que, pour $a_n < 1$ et $|t| \leq 1$, par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$|\varphi(a_n t) - \varphi(0)| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour trouver

$$\left|\frac{< f_n, \varphi >}{< f_n, 1 >} - \varphi(0)\right| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

D'où le résultat.

□

Chapitre 5

Opérations sur les distributions

5.1 Multiplication par une fonction C^∞

Définition 5.1.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $a \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire aT définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ par :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < aT, \varphi >=< T, a\varphi >$$

est une distribution appelée produit de a par T.

Démonstration : Tout d'abord, on a bien $a\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ donc le membre de droite est bien défini.
Puis, soit $K \subset \Omega$ un compact : il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ | < T, \varphi > | \leq C p_m(\varphi).$$

Alors,

$$| < aT, \varphi > | = | < T, a\varphi > | \leq C p_m(a\varphi).$$

Or, par la formule de Leibniz :

$$\partial^\alpha(a\varphi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta a \cdot \partial^{\alpha-\beta}\varphi.$$

Alors,

$$\max_{x\in K} |\partial^\alpha(a\varphi)(x)| \leq 2^{|\alpha|} \max_{|\beta_1|\leq|\alpha|} \max_{x\in K} |\partial^{\beta_1} a(x)| \cdot \max_{|\beta_2|\leq|\alpha|} \max_{x\in K} |\partial^{\beta_2}\varphi(x)| := \tilde{C} p_m(\varphi),$$

d'où, $p_m(a\varphi) \leq \tilde{C} p_m(\varphi)$ et on a finalement,

$$| < aT, \varphi > | \leq C p_m(a\varphi) \leq (C\tilde{C}) p_m(\varphi),$$

ce qui montre que aT est une distribution sur Ω.

□

Nous avons facilement les propriétés suivantes. Pour $a, b \in C^\infty(\Omega)$ et $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$(a+b)T = aT + bT, \quad (ab)T = a(bT), \quad a(S+T) = aS + aT.$$

De plus, la multiplication par une fonction C^∞ est une opération continue.

Proposition 5.1.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers a dans $C^\infty(\Omega)$ et soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On a alors, avec convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$,*

$$a_n T \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} aT, \quad aT_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} aT \quad \text{et} \quad a_n T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} aT.$$

Démonstration : Bien entendu, il suffit de montrer le troisième point. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Posons pour tout n, $\psi_n = a_n\varphi$. Alors, $\psi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\varphi$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ par la formule de Leibniz, donc

$$< a_n T_n, \varphi >=< T_n, \psi_n > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < T, a\varphi >=< aT, \varphi > .$$

Nous avons utilisé ici le corollaire 4.3.7.

□

Exemple 5.1.3. *Si $a \in C^\infty(\Omega)$ et si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, on a : $aT_f = T_{af}$.*

Exemple 5.1.4. *Si $a \in C^\infty(\Omega)$ et si $x_0 \in \Omega$, on a : $a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}$. En particulier dans $\mathbb{R}$, $x\delta_0 = 0$. La vérification est ici immédiate.*

Exemple 5.1.5. *On a : $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a*

$$\left\langle x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\mathrm{d}x =< 1, \varphi >,$$

par intégrabilité en 0 de la fonction continue φ.

Exemple 5.1.6. *Soit $-2 < \alpha < -1$. On a $x\mathrm{Pf}(x^\alpha) = x^{\alpha+1}$. En effet*

$$\begin{aligned}
\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < x\mathrm{Pf}(x^\alpha), \varphi > &= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x\varphi'(x) + \varphi(x))\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(x)\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^\infty x^{\alpha+1}\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x^{\alpha+1}\varphi(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

où on a utilisé que $x^{\alpha+2}$ est dérivable et que l'on peut appliquer la formule d'intégration par parties sur $[\varepsilon, a]$.

Remarque. On ne peut pas définir un produit raisonnable entre deux distributions. Par exemple, une multiplication basique du type "$< TS, \varphi >=< T, \varphi > \cdot < S, \varphi >$" ne définie même pas une forme linéaire.

Une autre objection est que l'on ne peut pas donner sens au carré de la distribution de Dirac en 0. Par exemple, on considère la famille de fonctions $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \phi_\varepsilon(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a, en utilisant Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$\int_{\mathbb{R}}\phi_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon\varphi(0) + O(\varepsilon^2)) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0).$$

et ainsi on a bien que $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Toutefois, on a aussi :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon^2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon\varphi(0) + O(\varepsilon^3))$$

qui diverge lorsque ε tend vers 0. Ainsi, $(\phi_\varepsilon^2)_{\varepsilon>0}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

D'un point de vue plus abstrait, on ne peut pas définir un produit entre deux distributions qui soit commutatif et associatif. Si cela était le cas, on aurait par exemple : $\delta_0 \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \delta_0$. D'où, en multipliant les deux membres par x, on aurait d'une part : $x(\delta_0 \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = (x\delta_0) \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. D'autre part, $x(\delta_0 \cdot \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = x(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \delta_0) = (x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) \cdot \delta_0 = 1 \cdot \delta_0 = \delta_0$, d'où la contradiction.

Une définition d'un produit de deux distributions reste possible à condition d'utiliser la transformée de Fourier, ce qui conduit à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Toutefois, sans aller jusque-là, nous verrons que l'on peut définir un produit de convolution entre deux distributions (moyennant des hypothèses sur leurs supports respectifs), ce produit ayant alors une interprétation physique naturelle.

5.2 Les équations $xT = 0$, $xT = 1$ et $xT = S$

Nous allons commencer par étudier ces trois équations pour $d = 1$. Nous donnerons ensuite un résultat plus général en dimension d quelconque pour le système d'équations $x_iT = 0$.

Proposition 5.2.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a alors équivalence entre*

1. *$xT = 0$.*
2. *$T = C\delta_0$ où $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration : On a déjà vu que, si $T = C\delta_0$, alors $xT = Cx\delta_0 = C \cdot 0 = 0$. D'où une première implication.

Pour l'autre sens, supposons que $xT = 0$. Pour $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 =< xT, \theta >=< T, x\theta >$. Donc T est nulle sur toutes les fonctions de la forme $x\theta$, $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Caractérisons ces fonctions. Tout d'abord, si $\psi = x\theta$, $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, il est clair que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et que $\psi(0) = 0$. Réciproquement, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(0) = 0$. Supposons que supp $\psi \subset [-A, A]$. Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, on peut écrire que $\psi(x) = \psi(0) + x\int_0^1 \psi'(tx)\mathrm{d}t = x\theta(x)$ où $\theta(x) = \int_0^1 \psi'(tx)\mathrm{d}t$. Alors, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ et si $|x| > A$, on a $\psi'(x) = 0$ d'où $\theta(x) = 0$. Donc $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Finalement, T s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\psi(0) = 0$. Fixons $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons $\psi = \varphi - \varphi(0)\chi$. Alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$. Donc $< T, \psi >= 0$, soit encore

$$< T, \varphi >= \varphi(0) < T, \chi >= C < \delta_0, \varphi > \quad \text{avec} \quad C =< T, \chi > .$$

D'où l'autre implication.

□

On peut alors étudier la même équation avec un second membre. On commence par regarder l'équation $xT = 1$.

Proposition 5.2.2. *Les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $xT = 1$ sont de la forme $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0$, $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration : On a déjà vu en exemple que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Donc si T est une solution de l'équation $xT = 1$, on doit avoir $x(T - \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = 0$. Par la proposition précédente, $T - \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = C\delta_0$ avec $C \in \mathbb{C}$.

□

On retrouve ici le principe général de résolution des équations linéaires : l'ensemble des solutions est un espace affine dirigé par le noyau de l'application linéaire qui définit l'équation considérée (soit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée) et passant par une solution particulière de l'équation. Nous pouvons en fait résoudre l'équation $xT = S$ pour n'importe quel second membre $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Proposition 5.2.3. *Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors l'équation $xT = S$ admet une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Posons $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi(0)\chi$. Alors $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Il existe donc $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\varphi} = x\theta$. On définit la distribution T par : $< T, \varphi > = < S, \theta >$. Alors $< xT, \varphi > = < T, x\varphi > = < S, \varphi >$, d'où $xT = S$. En effet, $\widetilde{x\varphi} = x\varphi - (x\varphi)(0)\chi = x\varphi$ et dans ce cas, $\theta = \varphi$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que la formule $< T, \varphi > = < S, \theta >$ définie bien une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{supp}\ \theta \subset \mathrm{supp}\ \varphi \cup \mathrm{supp}\ \chi$, donc $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Puis, comme $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $| < S, \theta > | \leq C_S p_m(\theta)$. Or, $\theta = \int_0^1 \varphi'(tx) - \varphi(0)\chi'(tx)\mathrm{d}t$, donc $p_m(\theta) \leq C p_{m+1}(\varphi)$. Ainsi, $| < T, \varphi > | \leq C_S \cdot C p_{m+1}(\varphi)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

□

Plus généralement, on peut prouver le résultat suivant.

Proposition 5.2.4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que : $\forall i \in \{1, \ldots d\},\ x_i T = 0$. Alors $T = C\delta_0$ avec $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration : La démonstration est la même que dans le cas $d = 1$ une fois prouvé le lemme d'Hadamard : supposons que $0 \in \Omega$ et soit $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\psi(0) = 0$. Alors il existe des fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_d \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que : $\forall x \in \Omega,\ \psi(x) = \sum_{i=1}^d x_i \psi_i(x)$. Cela résulte d'un développement de Taylor à l'ordre 1 et d'un changement de variable.

□

5.3 Dérivation d'une distribution

Nous avons déjà vu dans le chapitre 2, lors de notre étude de l'exemple de la fonction de Heaviside, qu'il est possible de donner un sens à la dérivée d'une fonction qui n'est pas dérivable au sens classique. Nous allons maintenant voir, et c'est là l'un des concepts les plus étonnants de la théorie des distributions, que l'on peut dériver à n'importe quel ordre une distribution quelconque et que cette dérivation est une opération continue. La situation est donc totalement différente du cadre des fonctions dérivables classiques. Il faut se dire que si une fonction classique n'est pas dérivable, cela signifie simplement que sa dérivée est une distribution qui n'est pas une fonction. La dérivée usuelle peut laisser échapper l'essentiel de la "vraie" dérivée, par exemple une masse de Dirac dans le cas de la fonction de Heaviside.

Le tout est de trouver "la bonne formule" pour définir la "bonne" notion de dérivée des distributions. Pour cela, regardons ce qui se passe dans le cas des distributions associées à une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties (le crochet s'annulant pour des raisons de support) :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < T_{f'}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\text{supp }\varphi} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -< T_f, \varphi' > .$$

Bien entendu, notre définition générale de la dérivée d'une distribution doit coïncider avec la notion de dérivée classique dans le cas des fonctions de classe C^1, nous allons donc adopter la définition suivante.

Définition 5.3.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. La forme linéaire $\partial_{x_i} T$ définie sur $C_0^\infty(\Omega)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \partial_{x_i} T, \varphi >= -< T, \partial_{x_i}\varphi >$$

est une distribution sur Ω appelée i-ième dérivée partielle de T.

Le fait que $\partial_{x_i} T$ soit une distribution est évident. Il est clair aussi que si T est une distribution d'ordre m donné, alors $\partial_{x_i} T$ est d'ordre $m+1$.
La définition de $\partial_{x_i} T$ peut être itérée autant de fois que voulu, on peut donc définir, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \partial^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi > .$$

La proposition suivante est tout à fait remarquable de simplicité lorsqu'on la compare aux énoncés équivalents dans le cadre des fonctions classiques qui requiert tous des hypothèses très fortes de convergence uniforme. En fait, le caractère uniforme est caché dans le théorème 4.3.6 basé sur le théorème d'uniformisation de Banach-Steinhaus.

Proposition 5.3.2. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha T_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$< \partial^\alpha T_n, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T_n, \partial^\alpha \varphi > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi >=< \partial^\alpha T, \varphi > .$$

D'où le résultat voulu.

□

La dérivation se comporte tout aussi bien vis-à-vis du produit par une fonction C^∞.

Proposition 5.3.3. *Soit $a \in C^\infty(\Omega)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, $\partial_{x_i}(aT) = (\partial_{x_i} a)T + a\partial_{x_i} T$.*

Démonstration : Cela provient directement de la formule de Leibniz.

□

Exemple 5.3.4. *La dérivée d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ est la distribution $T_{f'}$. C'est l'objet du calcul fait au début de cette section.*

Exemple 5.3.5. *La i-ième dérivée partielle d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ est la distribution $T_{\partial_{x_i} f}$. Cela résultera de la formule d'intégration par partie multidimensionnelle (voir Corollaire 10.4.4 au Chapitre 10).*

Exemple 5.3.6. *Soit H la fonction de Heaviside qui vaut 0 sur $]-\infty,0[$, $\frac{1}{2}$ en 0 et 1 sur $]0,+\infty[$. Alors, $H' = \delta_0$. En effet,*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < H', \varphi >= -< H, \varphi' >= -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > .$$

Exemple 5.3.7. *La fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \log|x|$ et une valeur quelconque en 0 est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On peut donc lui associer une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a alors : $(T_f)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.*

En effet, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a $< f', \varphi >= -< f, \varphi' >= -\int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x$. Or, par intégrabilité du logarithme en 0, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x := -\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_\varepsilon^\infty \log(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

On effectue une intégration par partie dans chacune des deux intégrales pour obtenir :

$$I_\varepsilon = -\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \varphi(-\varepsilon)\log(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\log(\varepsilon).$$

Or, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Donc $\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon) = -\varepsilon(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon))$, d'où

$$I_\varepsilon = -\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x - \varepsilon\log(\varepsilon)(\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)).$$

Comme $\varepsilon\log(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a finalement

$$< f', \varphi >= -\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

D'où le résultat annoncé.

Exemple 5.3.8. *Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$. Alors v est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $v' = u$ au sens des distributions.*

Commençons par montrer la continuité de v. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers x_0. On a : $\forall n \geq 0$, $v(x_n) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0,x_n)}(t)u(t)\mathrm{d}t$. Par le TCD, la suite $(v(x_n))_{n\geq 0}$ converge alors vers $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(0,x_0)}(t)u(t)\mathrm{d}t = v(x_0)$, d'où la continuité de v en x_0, donc sur $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et supposons que $\mathrm{supp}\ \varphi \subset [-A, A]$. En utilisant Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
< v', \varphi > &= -< v, \varphi' >= -\int_{-A}^A \left(\int_0^x u(t)\mathrm{d}t\right)\varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^A\int_0^x u(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{-A}^0\int_x^0 u(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^A u(t)\left(\int_t^A \varphi'(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t + \int_{-A}^0 u(t)\left(\int_{-A}^t \varphi'(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{-A}^0 u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t =< u, \varphi > .
\end{aligned}$$

On a bien $v' = u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exemple 5.3.9. *La forme associée à la dérivée α-ième d'une mesure de Radon μ sur Ω, notée $\partial^\alpha \mu$, est l'application de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \partial^\alpha \mu, \varphi >= \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x).$$

C'est une forme linéaire sur C_0^∞. Si $K \subset \Omega$ est compact, on a l'inégalité, due au fait que μ charge de manière finie les compacts :

$$\left| \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x) \right| \leq \mu(K) \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

En particulier, la notation $\partial^\alpha \mu$ provient du fait que, si μ est une mesure définie par une densité $\rho(x)$ qui est de classe C^k, alors $d\mu(x) = \rho(x)dx$ et on a, pour $|\alpha| \leq k$:

$$\int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x) = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) \rho(x) dx = \int_\Omega \partial^\alpha \rho(x) \varphi(x) dx,$$

et ainsi cette forme linéaire est associée à la mesure de densité $\partial^\alpha \rho$. Remarquons que nous avons à nouveau utilisé le Corollaire 10.4.4 du Chapitre 10.

5.4 Les équations $T' = 0$ et $\partial_{x_i} T = 0$.

Nous allons commencer par regarder ce qui se passe en dimension $d = 1$. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a $T' = 0 \ \Leftrightarrow\ T$ est constante.*

Démonstration : Si on suppose que T est constante, il est alors évident que $T' = 0$ puisque φ est à support compact.

Réciproquement, supposons que $T' = 0$. Alors, si $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $< T', \theta >= - < T, \theta' >= 0$. Donc T s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ de la forme $\psi = \theta'$ où $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Caractérisons ces fonctions. On montre que

$$(\psi = \theta',\ \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})) \Leftrightarrow \left(\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \mathrm{d}x = 0 \right).$$

Le sens direct est évident puisque θ est à support compact. Réciproquement, on pose : $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) \mathrm{d}t$ avec supp $\psi \subset [-M, M]$. Il est clair que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si $x < -M$, alors $\theta(x) = 0$ (car ψ est nulle sur $]-\infty, x]$ dans ce cas). Si $x > M$, alors $\int_x^{+\infty} \psi(t) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \mathrm{d}t = 0$ par hypothèse. D'où,

$$\forall x > M,\ \theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) \mathrm{d}t + 0 = \int_{-\infty}^x \psi(t) \mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \psi(t) \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \mathrm{d}t = 0,$$

donc supp $\theta \subset [-M, M]$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Et bien entendu, on $\psi = \theta'$.

Nous allons utiliser cette équivalence. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\int_{\mathbb{R}} \chi(x) \mathrm{d}x = 1$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \mathrm{d}t \right) \chi(x).$$

Alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) \mathrm{d}t = 0$. Par conséquent, il existe $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \theta'$ et $< T, \psi >= 0$. Alors, par linéarité de T,

$$< T, \varphi >=< T, \chi > \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathrm{d}x = C < 1, \varphi >=< C, \varphi >, \text{ avec } C =< T, \chi >\in \mathbb{C}.$$

Donc T est constante.

□

Le résultat persiste en dimension supérieure, mais sa démonstration est plus difficile. Nous allons admettre un résultat plus général dont on déduira le résultat voulu immédiatement (pour une démonstration d'une forme un peu plus faible de ce résultat, voir [7, Corollaire 2.19, p52]).

Théorème 5.4.2 (Admis)**.** *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose qu'il existe $f_1, \ldots f_d$ des fonctions continues sur Ω telles que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\partial_{x_i} T = f_i$. Alors il existe f de classe C^1 sur Ω telle que $T = f$.*

Corollaire 5.4.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et supposons que l'ouvert Ω est connexe. Supposons que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\partial_{x_i} T = 0$. Alors T est constante.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème précédent puis le résultat classique sur les fonctions de classe C^1 de dérivées nulles sur un ouvert connexe (résultat basé sur les accroissements finis).

□

5.5 Formule des sauts en dimension 1

On se donne une fonction f, qui est de classe C^1 par morceaux dans $[a, b]$, et qui admet, en tout point où elle n'est pas continue, une limite à droite et une limite à gauche. Il existe ainsi une subdivision de $[a, b]$ en intervalles $[a, a_1[$, $]a_i, a_{i+1}[$, $]a_{i+1}, b]$ telle que f soit de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$. On note $f(a_i^+)$ et $f(a_i^-)$ les limites respectives à droite et à gauche au point a_i. Par convention, les points intérieurs à $[a, b]$ sont $a_1, .., a_n$ et on note $a_0 = a, a_{n+1} = b$. La fonction f définit une distribution, dont on calcule la dérivée, que nous notons $(T_f)'$. Par définition, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi'(x) >= - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx = \varphi(a_{i+1})f(a_{i+1}^-) - \varphi(a_i)f(a_i^+) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx$, où la fonction f' est définie presque partout, on a la relation

$$- \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=0}^{n} f(a_i^+)\varphi(a_i) - f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}).$$

Soit, en notant $T_{f'}$ la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$,

$$< (T_f)', \varphi >=< T_{f'}, \varphi > +(f(a^+) - 0) < \delta_a, \varphi > +(0 - f(b^-)) < \delta_b, \varphi > + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-)) < \delta_{a_i}, \varphi > .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 5.5.1. *La distribution $(T_f)'$ est donnée, à partir de $T_{f'}$ et des sauts de f en chaque a_i, par*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

avec les conventions $a_0 = a, a_{n+1} = b$, $f(a_0^-) = 0$, $f(a_{n+1}^+) = 0$.

Ce résultat s'étend aux dérivées successives, comme pour la dérivée seconde, en considérant les sauts de f et ceux de sa dérivée :

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta'_{a_i} + \sum_{i=0}^{n+1} (f'(a_i^+) - f'(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

On en déduit aussi la proposition :

Proposition 5.5.2. *Soit u une fonction C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$. On la prolonge par 0 à l'extérieur de $[a,b]$ et on note ce prolongement $\underline{u}$. De même, on note $\underline{u}'$ le prolongement de la fonction u', définie par u' sur $]a,b[$ et par 0 à l'extérieur. Alors*

$$(T_{\underline{u}})' = T_{\underline{u}'} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b.$$

Cette proposition est le cas particulier où la fonction u est de classe C^1 par morceaux d'un résultat plus général :

Proposition 5.5.3. *Soit $g \in C^0(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$, $a, b \in I$. Alors,*

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Nous avons ainsi trouvé la dérivée d'un prolongement par 0 en dimension 1.

Chapitre 6

Support d'une distribution

Dans tout le chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

6.1 Partitions de l'unité

Nous commençons par donner un lemme technique qui nous sera très utile par la suite, il s'agit du lemme des partitions de l'unité. Ce lemme est un outil permettant de passer du local au global.

Lemme 6.1.1. *Soit K un compact, $K \subset \Omega$ et $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \Omega_j$ avec $(\Omega_j)_{1\leq j\leq p}$ une famille finie d'ouverts inclus dans Ω. Alors, il existe des fonctions $(\chi_j)_{1\leq j\leq p}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ telles que :*

$$\forall j \in \{1,\ldots,p\},\ 0 \leq \chi_j \leq 1, \quad \text{supp }(\chi_j) \subset \Omega_j, \quad \textit{et} \quad \forall x \in K,\ \sum_{j=1}^{p} \chi_j(x) = 1.$$

Démonstration : Tout d'abord, si S est un compact inclus dans un ouvert U de $\mathbb{R}^d$, alors il existe un ouvert V, $S \subset V$ tel que $\overline{V} \subset U$ avec $\overline{V}$ compact. En effet, il suffit de construire $V = \{x \in U \mid d(x,S) < \delta/2\}$ où $\delta = \min_{x\in S} d(x, U^c)$.

Soit $S_1 = K \setminus (\Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_p)$. Alors, S_1 est fermé et borné donc compact. De plus, $S_1 \subset \Omega_1$. Donc il existe un ouvert V_1 d'adhérence compacte tel que $S_1 \subset V_1$ et $\overline{V_1} \subset \Omega_1$. Alors, $K \subset S_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \Omega_p$ d'où $K \subset V_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \Omega_p$. Puis, on pose $S_2 = K \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_3 \cup \ldots \cup \Omega_p) \subset \Omega_2$ et on construit de même V_2 un voisinage ouvert d'adhérence compacte de S_2 tel que $\overline{V_2} \subset \Omega_2$. Alors, $K \subset \Omega_1 \cup V_2 \cup \Omega_3 \cup \ldots \cup \Omega_p$, d'où par intersection, $K \subset V_1 \cup V_2 \cup \Omega_3 \cup \ldots \cup \Omega_p$. On construit donc par récurrence une suite d'ouverts $V_1, \ldots V_p$ d'adhérences compactes tels que pour tout j, $K \subset V_1 \cup \ldots \cup V_j \cup \Omega_{j+1} \cup \ldots \cup \Omega_p$.

Pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, soit $\tilde{\chi}_j \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que supp $\tilde{\chi}_j \subset \Omega_j$, $\tilde{\chi}_j = 1$ sur $\overline{V_j}$ et $0 \leq \tilde{\chi}_j \leq 1$. On pose enfin $\chi_1 = \tilde{\chi}_1$, $\chi_2 = \tilde{\chi}_1(1-\tilde{\chi}_2)$ et $\chi_j = \tilde{\chi}_1(1-\tilde{\chi}_2)\cdots(1-\tilde{\chi}_j)$. Les χ_j conviennent car on a de plus,

$$1 - \sum_{j=1}^{p} \chi_j = \prod_{j=1}^{p}(1-\tilde{\chi}_j) = 0 \quad \text{sur} \quad K.$$

□

6.2 Restriction à un ouvert

Définition 6.2.1. *Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ on définit $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$ qui est égale à φ sur ω et à 0 sur $\Omega \setminus \omega$. Alors, la forme linéaire $T|_\omega$ définie sur $C_0^\infty(\omega)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega), \; < T|_\omega, \varphi >=< T, \tilde{\varphi} >$$

est une distribution sur ω appelée la restriction de T à ω.

Il est clair par raccordement, puisque supp $\varphi \subset \omega \subset \Omega$ est un compact, que $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$. Donc la définition est bien posée.

Définition 6.2.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle dans ω si $T|_\omega = 0$.*

On a alors un résultat de passage du local au global pour cette notion de nullité locale d'une distribution.

Lemme 6.2.3. *Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Ω et soit ω leur réunion. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que pour tout $i \in I$, $T|_{\omega_i} = 0$. Alors $T|_\omega = 0$.*

Démonstration : On doit montrer que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, $< T, \varphi >= 0$. Soit donc $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ et soit $K = \operatorname{supp} \varphi$. Comme $K \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$, on peut extraire de ce recouvrement ouvert de K un sous-recouvrement fini indicé par $J \subset I$ fini (propriété de Borel-Lebesgue). Soit alors $(\chi_i)_{i\in J}$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(\omega_i)_{i\in J}$ de K. Alors pour tout $i \in J$, $\chi_i \in C_0^\infty(\omega_i)$ et $\sum_{i\in J} \chi_i(x) = 1$ pour $x \in \bigcup_{i\in J} \omega_i$. Comme φ est à support dans $K \subset \bigcup_{i\in J} \omega_i$, on a $\varphi = \sum_{i\in J} \chi_i \varphi$ et ainsi

$$< T, \varphi >= \sum_{i\in J} < T, \chi_i \varphi > .$$

Or, pour tout $i \in J$, $\chi_i \varphi \in C_0^\infty(\omega_i)$ et $T|_{\omega_i} = 0$, donc $< T, \chi_i \varphi >= 0$ et $< T, \varphi >= 0$.

□

6.3 Support d'une distribution

Le lemme 6.2.3 nous montre que pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, il existe un plus grand ouvert où T est nulle, la réunion de tous les ouverts où T est nulle. Cela nous conduit à la définition du support d'une distribution.

Définition 6.3.1. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support de T, noté* supp T, *le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.*

Remarque. Comme complémentaire d'un ouvert, supp T **est toujours un fermé**.

En traduisant la définition, on peut écrire les assertions suivantes :

1. $x_0 \notin \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$, un voisinage ouvert de x_0 tel que : $\forall \varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $< T, \varphi >= 0$.
2. $\operatorname{supp} T = \{x \in \Omega \mid T \text{ nulle près de } x\}^c$.
3. $x_0 \in \operatorname{supp} T \Leftrightarrow \forall V_{x_0}, \exists \varphi \in C_0^\infty(V_{x_0}), \; < T, \varphi >\neq 0$.
4. $\operatorname{supp} T \subset F \Leftrightarrow T = 0$ dans F^c.

Proposition 6.3.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ telles que* $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$. *Alors,* $< T, \varphi >= 0$.

Démonstration : La démonstration est analogue à celle du lemme 6.2.3, si ce n'est que la propriété de Borel-Lebesgue est cette fois appliquée à un recouvrement ouvert du compact supp φ.

$\square$

Nous avons aussi le résultat suivant, utile en pratique.

Proposition 6.3.3. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,* supp $T = \emptyset \Leftrightarrow T = 0$.

Démonstration : Si $T = 0$ il est clair par définition que supp $T = \emptyset$. Réciproquement, si supp $T = \emptyset$, alors pour tout $x \in \Omega$, il existe un ouvert $\omega_x \subset \Omega$ contenant x tel que $T|_{\omega_x} = 0$. Par le lemme 6.2.3, $T = 0$ car $\bigcup_{x \in \Omega} \omega_x = \Omega$.

$\square$

Cette proposition a pour corollaire un principe de localisation.

Corollaire 6.3.4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que T est localement une fonction C^k pour $0 \leq k \leq \infty$,* i.e.

$$\forall x \in \Omega,\ \exists \omega_x \text{ ouvert },\ x \in \omega_x \text{ et } \exists f_x \in C^k(\omega_x),\ T|_{\omega_x} = T_{f_x}.$$

Alors, il existe $f \in C^k(\Omega)$ telle que $T = T_f$.

Démonstration : En effet, comme $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \omega_x$, on peut choisir pour tout $x \in \Omega$, $f_x \in C^k(\omega_x)$ telle que $T|_{\omega_x} = T_{f_x}$. Or, sur $\omega_x \cap \omega_y$, $f_x = f_y$ car $T_{f_x}|_{\omega_x \cap \omega_y} = T|_{\omega_x \cap \omega_y} = T_{f_y}|_{\omega_x \cap \omega_y}$, puis on utilise la continuité de f_x et f_y pour en déduire $f_x = f_y$ partout et pas uniquement presque partout sur $\omega_x \cap \omega_y$.

Alors, on peut poser légitimement $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = f_x(z)$ si $z \in \omega_x$. La fonction f est de classe C^k sur Ω car elle est C^k au voisinage de tout $x \in \Omega$ et on a : $\forall x \in \Omega,\ (T - T_f)|_{\omega_x} = 0$. Par définition du support, supp $(T - T_f) = \emptyset$, donc par la proposition précédente, $T = T_f$.

$\square$

On a aussi des résultats qui font le lien entre opérations sur les distributions et support. Tout d'abord, la multiplication.

Proposition 6.3.5. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $a \in C^\infty(\Omega)$. Alors :* supp $(aT) \subset$ supp $a \cap$ supp T.

Démonstration : Soit $x_0 \in (\text{supp } a)^c \cup (\text{supp } T)^c$. Si $x_0 \in (\text{supp } a)^c$, il existe V_{x_0} voisinage de x_0 tel que $a(x) = 0$ pour tout $x \in V_{x_0}$. Alors si $\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, on a, pour tout $x \in \Omega$, $a(x)\varphi(x) = 0$. D'où $< aT, \varphi >=< T, a\varphi >= 0$ et $x_0 \notin$ supp (aT).

Si $x_0 \in (\text{supp } T)^c$, il existe V_{x_0} tel que $< T, \psi >= 0$ pour $\psi \in C_0^\infty(V_{x_0})$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$. Alors $a\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$ donc $< aT, \varphi >=< T, a\varphi >= 0$ et $x_0 \notin$ supp (aT).

$\square$

Pour la dérivation le résultat est évident.

Proposition 6.3.6. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,* supp $\partial^\alpha T \subset$ supp T.

Terminons cette section par quelques exemples. D'autres seront détaillés en tds.

Exemple 6.3.7. *Cet exemple est fondamental. Soit f une fonction continue sur Ω. Alors* $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$ *où* $\operatorname{supp} f$ *est le support au sens classique de la fonction continue f.*

En effet, si $x_0 \notin \operatorname{supp} f$, il existe V_{x_0} voisinage ouvert de x_0 tel que $f(x) = 0$ pour $x \in V_{x_0}$. Alors, si $\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $\varphi(x)f(x) = 0$ dans Ω, donc $< T_f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, $x_0 \notin \operatorname{supp} T_f$. D'où la première inclusion : $\operatorname{supp} T_f \subset \operatorname{supp} f$. Réciproquement, si $x_0 \notin \operatorname{supp} T_f$, il existe V_{x_0} voisinage ouvert de x_0 tel que $\forall \varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Par le lemme de Dubois-Reymond, f est nulle presque partout (donc partout puisque f est continue) dans V_{x_0}. Donc, $x_0 \notin \operatorname{supp} f$. D'où la seconde inclusion.

Exemple 6.3.8. *Pour tout $a \in \Omega$,* $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

En effet, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, on a $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = 0$, donc $\operatorname{supp} \delta_a \subset \{a\}$. *Réciproquement, soit V_a un voisinage ouvert de a et soit ρ une fonction pic au voisinage de a, $\rho(a) = 1$. Alors, $< \delta_a, \rho >= \rho(a) = 1 \neq 0$. Donc $a \in \operatorname{supp} \delta_a$. D'où l'inclusion inverse.*

Exemple 6.3.9. *On a* $\operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$.

En effet, soit $x_0 \neq 0$. Supposons que $x_0 > 0$, la démonstration est la même pour $x_0 < 0$. Soit ρ_{x_0} une fonction pic centrée en x_0, et supportée sur $[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}]$. On a, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{x_0}{2}$,

$$\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\rho_{x_0}(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{x_0}{2}}^{\frac{3x_0}{2}} \frac{\rho_{x_0}(x)}{x}\mathrm{d}x = C > 0.$$

D'où, $< \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \rho_{x_0} >\neq 0$ et $x_0 \in \operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\mathbb{R}^* \subset \operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \subset \mathbb{R}$. Comme le support d'une distribution est un fermé, on a nécessairement $\operatorname{supp} \operatorname{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$.

6.4 Distributions à support compact

Définition 6.4.1. *On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact lorsque* $\operatorname{supp} T$ *est compact. On note l'ensemble des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Proposition 6.4.2. *Une distribution de $\mathcal{E}'(\Omega)$ peut être prolongée à $C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration : Soit K le support compact de $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On se donne K' un compact contenant K et K'' un compact contenant K' de sorte qu'il existe χ une fonction plateau qui soit égale à 1 sur K' et qui soit supportée dans K''. On vérifie que, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$< T, \varphi >=< T, \chi\varphi > + < T, (1-\chi)\varphi > .$$

Comme $(1-\chi)\varphi$ est supportée dans un compact contenu dans le complémentaire du support de T, $< T, (1-\chi)\varphi >= 0$. D'où : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), < T, \varphi >=< T, \chi\varphi >$.
On **définit** alors $< T, \phi >$ pour $\phi \in C^\infty$ par : $< T, \phi >=< T, \chi\phi >$. Comme $\chi\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $< T, \chi\phi >$ est bien définie. De plus,

$$||\partial^\alpha(\chi\phi)|| \leq C \max_{|\beta| \leq |\alpha|} ||\partial^\beta \phi||_{K''}.$$

□

On en déduit une définition de la continuité dans $C^\infty(\Omega)$ de $\phi \to < T, \phi >$. Cette continuité est caractérisée par une convergence uniforme sur tout compact de la suite $(\phi_n)_{n\geq 0}$ et des suites des dérivées $(\partial^\alpha \phi_n)_{n\geq 0}$ respectivement vers ϕ et les dérivées $\partial^\alpha \phi$. Contrairement à la convergence associée aux fonctions à support compact, il n'y a pas ici d'hypothèse sur les supports.

On peut montrer qu'en fait, on a exactement $\mathcal{E}'(\Omega) = (C^\infty(\Omega))'$ tout comme on a déjà vu que $\mathcal{D}'(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega))'$ (voir [4, Theorem 2.3.1, p44]).

Proposition 6.4.3. *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

Démonstration : On rappelle l'égalité $< T, \varphi >=< T, \varphi(1-\chi) > + < T, \varphi\chi >=< T, \varphi\chi >$, où $\varphi\chi$ est supportée dans K''. Il existe alors un entier m_0 et une constante C_0, tous les deux associés à la majoration de $< T, \phi >$ pour $\phi \in C_0^\infty(K'')$, tels que

$$| < T, \varphi > | \leq C_0 \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in K''} |\partial^\alpha(\varphi\chi)|.$$

L'application de la formule de Leibniz donne

$$\partial^\alpha(\varphi\chi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \partial^\gamma \chi$$

et les majorations uniformes, pour $|\gamma| \leq m_0$, de $\partial^\gamma \chi$ par $||\chi||_{m_0} = \max_{x \in K'', |\gamma| \leq m_0} |\partial^\gamma \chi(x)|$, et de $\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}$ permettent d'obtenir une constante C telle que

$$C_0 \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in K''} |\partial^\alpha(\varphi\chi)| \leq C \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in \mathrm{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

et

$$| < T, \varphi > | \leq C \max_{|\alpha| \leq m_0} \max_{x \in \mathrm{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Cela prouve que T est d'ordre au plus m_0 donc d'ordre fini.

□

6.5 Distributions à support ponctuel

Nous avons déjà vu dans les exemples plus haut que supp $\delta_a = \{a\}$. On montre de même que le support des dérivées du Dirac est aussi un singleton. En fait, la réciproque est vraie au sens du théorème suivant.

Théorème 6.5.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $x_0 \in \Omega$. Supposons que* supp $T = \{x_0\}$*. Il existe alors un entier m et des nombres complexes $(a_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ tels que*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < T, \varphi >= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \tilde{a}_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0},\ ou\ \tilde{a}_\alpha = (-1)^{|\alpha|} a_\alpha.$$

Démonstration : Pour simplifier les notations et ne conserver que les principales idées de la preuve, nous allons nous restreindre au cas de la dimension $d = 1$. Sans perdre en généralité on peut aussi supposer que $x_0 = 0$.

Tout d'abord, comme T est à support compact, T est d'ordre fini. Notons m l'ordre de T. Soit χ une fonction plateau valant 1 dans un voisinage compact de 0 inclus dans $]-1, 1[$ et 0 hors de $]-1, 1[$. On note, pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\chi_r(x) = \chi(x/r)$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu) \mathrm{d}u.$$

En posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu)\mathrm{d}u$, on définit une fonction de classe C^∞ et on a $\psi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0.

La fonction $\chi\varphi$ est à support compact et elle est égale à φ au voisinage de 0, donc, comme supp $T = \{0\}$, on a :

$$< T, \varphi >=< T, \chi\varphi >= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} < T, \chi x^k > + < T, \chi\psi > .$$

Or, $\chi\psi$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $(\chi\psi)(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0. Montrons que cela entraîne que $< T, \chi\psi >= 0$.

Notons $\tilde{\psi} = \chi\psi$. Par la formule de Leibniz, on a

$$\forall l \leq m,\ (\chi_r \tilde{\psi})^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \binom{k}{l} \chi_r^{(l-k)} \tilde{\psi}^{(k)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\tilde{\psi}(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0, par unicité du développement limité, $\tilde{\psi}^{(k)}(x) = o(x^{m-k})$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_r^{(l-k)}(x) = r^{k-l} \chi^{(l-k)}(x/r)$. Alors, pour r assez petit et $|x| \leq r$,

$$|\chi_r^{(l-k)}(x) \tilde{\psi}^{(k)}(x)| \leq r^{m-k} r^{k-l} ||\chi^{(l-k)}||_\infty = r^{m-l} ||\chi^{(l-k)}||_\infty \leq \varepsilon ||\chi^{(l-k)}||_\infty.$$

Donc,

$$\lim_{r \to 0} \sup_{|x| \leq r} |(\chi_r \tilde{\psi})^{(l)}(x)| = 0.$$

Comme supp $T = \{0\}$ et que χ_r vaut 1 au voisinage de 0,

$$\forall r > 0,\ < T, \tilde{\psi} >=< T, \chi_r \tilde{\psi} > .$$

Comme T est d'ordre m, que $\chi_r \tilde{\psi}$ est à support dans $[-r, r]$ et $[-r, r] \subset [-1, 1]$ qui est un compact fixe, on a

$$\forall 0 < r < 1,\ | < T, \chi_r \tilde{\psi} > | \leq \sum_{j \leq m} C_{[-1,1]} ||(\chi_r \tilde{\psi})^{(l)}||_\infty \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, $| < T, \chi_r \tilde{\psi} > | \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $< T, \tilde{\psi} >= 0$.

Finalement,

$$< T, \varphi >= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} < T, \chi x^k > +0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{k!} < T, \chi x^k > \right) \varphi^{(k)}(0).$$

D'où le résultat en posant $a_k = \frac{(-1)^k}{k!} < T, \chi x^k >$.

□

Deuxième partie

Notions avancées

Chapitre 7

Convolution des distributions

Dans ce premier chapitre d'introduction à la notion de produit de convolution de deux distributions, nous allons le définir non pas par une formule générale, mais par une première formule dans le cas le plus simple puis par les propriétés qu'il doit vérifier.

7.1 Produit de convolution de deux distributions

Nous avons déjà défini le produit de convolution de deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Regardons le cas particulier du produit de convolution d'une fonction intégrable par une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Soient $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$(u \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\varphi(x-y)\mathrm{d}y = (u \mid \varphi(x - \cdot))$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par analogie, nous allons poser comme définition la formule suivante pour le produit de convolution d'une distribution par une fonction test.

Définition 7.1.1. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Leur produit de convolution est la fonction définie en chaque point par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T \star \varphi)(x) =< T, \varphi(x - \cdot) > .$$

Alors $T \star \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Le fait que la fonction $T \star \varphi$ est bien de classe C^∞ est une conséquence immédiate du théorème de dérivation sous le crochet (voir Proposition A.0.1) que nous verrons au chapitre 7. Par ailleurs, ce même résultat de dérivation sous le crochet nous donne le fait que la dérivation se comporte très bien par rapport au produit de convolution.

Proposition 7.1.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors*

$$\partial^\alpha(T \star \varphi) = (\partial^\alpha T) \star \varphi = T \star (\partial^\alpha \varphi).$$

Plus généralement, pour toute décomposition du multi-indice $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, on a

$$\partial^\alpha(T \star \varphi) = (\partial^{\alpha_1} T) \star (\partial^{\alpha_2} \varphi).$$

De la définition "ponctuelle" de la convolution entre une distribution et une fonction test que nous avons donné, il en résulte une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Or, à cette fonction est toujours associée de manière unique une distribution puisqu'elle est en particulier dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Voyons comment agit cette distribution associée sur les fonctions tests. Pour cela on introduit tout d'abord une notation.

A toute fonction f, on associe la fonction $\check{f} : x \mapsto f(-x)$. On remarque que, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a

$$< T, \varphi >= (T \star \check{\varphi})(0).$$

Proposition 7.1.3. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

$$(T \star \varphi) \star \psi = T \star (\varphi \star \psi) \quad \text{et} \quad < T \star \varphi, \psi >=< T, \check{\varphi} \star \psi > .$$

Cette proposition découle de la Proposition A.0.2. Nous énonçons à présent une autre propriété essentielle du produit de convolution : celui-ci est continu. Ce sera une conséquence des propriétés plus générales de continuité du produit de convolution de deux distributions.

Proposition 7.1.4.

1. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T_n \star \varphi)_{n\geq 0}$ converge vers $T \star \varphi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T \star \varphi_n)_{n\geq 0}$ converge vers $T \star \varphi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

On peut maintenant se demander comment définir le produit de convolution de deux distributions. Pour cela nous allons utiliser un résultat de densité qui est démontré par troncature et régularisation. Enonçons ce résultat sous une première forme simple.

Théorème 7.1.5. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Il existe alors une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ de fonctions dans $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers T au sens des distributions.*

On peut alors définir le produit de convolution de deux distributions, en rajoutant une hypothèse sur les supports de ces distributions que nous détaillerons au chapitre 7, après avoir vu la notion de support d'une distribution au chapitre 6.

Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact. On approche T par des fonctions φ_n dans $C_0^\infty(\Omega)$. Alors, pour toute $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, la suite $(< \varphi_n \star S, \psi >)_{n\geq 0}$ converge, donc $(\varphi_n \star S)_{n\geq 0}$ possède une limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cette limite est notée $T \star S$ et on a, par continuité du produit de convolution, la convergence de $(\varphi_n \star S)_{n\geq 0}$ vers $T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Tout cela sera justifié proprement au chapitre 7, mais l'idée de la construction reste valide. Nous allons, dans la prochaine section, énoncer les principales propriétés du produit de convolution.

7.2 Propriétés de la convolution

Commençons par donner les propriétés algébriques de base du produit de convolution.

Proposition 7.2.1. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S, U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à supports compacts. On a*

1. *Associativité : $T \star (S \star U) = (T \star S) \star U$.*
2. *Commutativité : $T \star S = S \star T$.*
3. *Élément neutre : $T \star \delta_0 = \delta_0 \star T = T$.*

La dérivation se comporte encore très bien par rapport au produit de convolution de deux distributions.

Proposition 7.2.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors*

$$\partial^\alpha (T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S).$$

En particulier, $(\partial^\alpha \delta_0) \star T = \partial^\alpha T$.

Enfin, la propriété de continuité du produit de convolution est préservée.

7.3 Interprétation physique de la convolution.

Considérons un système physique, que nous nous représenterons comme une "boîte noire", qui, lorsqu'on l'excite avec un signal $s(t)$ produit une réponse $r(t)$. On fait les hypothèses physiques suivantes :

— Le principe de superposition : si r_1 et r_2 sont les réponses aux signaux s_1 et s_2, alors la réponse au signal $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ est $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ pour tous réels λ_1 et λ_2.

— L'homogénéité dans le temps : la réponse au signal s décalé de T secondes est la réponse r décalée de T secondes.

— Une certaine stabilité : des signaux très voisins ne produisent pas des réponses très différentes.

Alors, si on considère l'application de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ qui à s associe r, nos hypothèses physiques s'interprètent comme le fait que cette application est linéaire, qu'elle commute avec les translations et qu'elle est continue en un certain sens. Sous ces hypothèses, on peut montrer qu'il existe une distribution T sur $\mathbb{R}$ telle que $r = T \star s$. Ce résultat étant très général, il explique en partie le fait que la convolution intervienne très souvent en physique. Nous en donnerons un énoncé précis au chapitre 7.

7.4 Comment calculer un produit de convolution

Nous avons vu la définition d'un produit de convolution et les différentes propriétés de ce produit de convolution. Nous allons maintenant voir comment en pratique on peut calculer le produit de convolution de deux distributions suivant les situations.

7.4.1 Convolution de deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$

Si f et g sont deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors on a $T_f \star T_g = T_{f\star g}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

7.4.2 Convolution d'une distribution et d'une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors la distribution $T \star \varphi$ est donnée par la fonction de classe C^∞, $x \mapsto < T, \varphi(x - \cdot) >$.

7.4.3 Utilisation des propriétés de la convolution

On peut par exemple utiliser l'approximation d'une des deux distributions par des fonctions de classe C_0^∞ et se ramener pour chaque terme de la suite au cas précédent. Parfois la suite approchante est suffisamment explicite pour permettre cette approche. On passe ensuite à la limite pour trouver la convolution des deux distributions.

On peut aussi utiliser les propriétés de dérivation de la convolution. Par exemple en dimension $d = 1$, si T est la dérivée de $\tilde{T}$, il peut être plus simple de calculer d'abord $\tilde{T} \star S$ et d'utiliser ensuite le fait que $T \star S = (\tilde{T} \star S)'$. Si au contraire il est plus simple de calculer $T' \star S$, on commence par faire ce calcul et alors on peut retrouver $T \star S$ à une constante près (par primitivation).

Exemple 7.4.1. *On veut calculer $\delta_0' \star \delta_0'$. On part de $\delta_0 \star \delta_0 = \delta_0$ et on dérive deux fois en faisant porter la dérivation une fois sur chaque terme pour obtenir que $\delta_0' \star \delta_0' = \delta_0''$.*

Chapitre 8

Transformée de Fourier des distributions tempérées

La théorie de Fourier classique nous enseigne que, lorsqu'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est continue et périodique de période T, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx\frac{2\pi}{T}} \tag{8.1}$$

avec

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt\frac{2\pi}{T}}\mathrm{d}t.$$

Lorsque f est quelconque, on ne peut pas, en général, la représenter comme une série de Fourier. Il faut qu'elle soit périodique. On cherche alors une représentation de type intégral. C'est ce que nous allons faire heuristiquement. Pour cela on remplace c_n par son expression intégrale dans (8.1) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)\frac{2\pi}{T}}\mathrm{d}t.$$

Or, la vitesse de convergence vers 0 à l'infini des coefficients de Fourier est contrôlée par la régularité de f. Ainsi, si f est suffisamment régulière, par exemple de classe C^∞, $c_n = \mathcal{O}(|n|^{-p})$ pour tout $p \geq 0$. Cela nous amène à négliger, pour T assez grand, les termes dans la somme infinie tels que $|n| > \frac{T^2}{2}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \simeq \frac{1}{T}\sum_{|n|\leq\frac{T^2}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)\frac{2\pi}{T}}\mathrm{d}t.$$

Cette somme finie est une somme de Riemann et on obtient, lorsque T tend vers $+\infty$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi(x-t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\xi x}\mathrm{d}\xi,\ \text{ avec }\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\xi t}\mathrm{d}t.$$

On retrouve ainsi heuristiquement l'analogue pour des fonctions non périodiques de la formule de reconstitution du signal pour les fonctions périodiques, une intégrale remplaçant la somme discrète dans (8.1). Cette formule est appelée formule d'inversion de Fourier et l'un des principaux objectifs de ce cours sera de démontrer une telle formule pour une classe de fonctions adaptées, puis de l'étendre par dualité à une large classe de distributions.

8.1 La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

8.1.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

De façon classique, la transformée de Fourier est définie sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi x\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

où $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$. Toutefois, l'espace des fonctions intégrables n'est pas invariant par transformée de Fourier et il est donc nécessaire de trouver un espace qui le soit sur lequel nous pourrons au mieux définir cette transformée.
Les opérations que nous avons étudiées sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ont été définies par dualité à partir de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et il était important que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ soit invariant par ces opérations. Or, tout comme $L^1(\mathbb{R}^d)$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ n'est pas invariant par transformée de Fourier, la transformée de Fourier d'une fonction non identiquement nulle à support compact n'étant jamais à support compact. Nous allons donc chercher un espace intermédiaire entre $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui soit invariant par $\mathcal{F}$. Pour obtenir ensuite par dualité l'espace le plus grand possible, on va essayer de trouver un espace invariant qui soit le plus petit possible. On commence donc par se restreindre à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, une condition suffisante pour que $\hat{f}$ soit dérivable est que f et $x \mapsto xf(x)$ soient toutes deux intégrables. Plus généralement, pour avoir $\hat{f}$ de classe C^∞, il suffit d'avoir $x \mapsto x^p f(x)$ intégrable pour tout $p \geq 0$. On veut aussi avoir le même contrôle pour toutes les dérivées de f. Cela conduit à introduire l'espace de Schwartz.

Définition 8.1.1. *L'espace $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, appelé espace de Schwartz, est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}. \tag{8.2}$$

L'espace $\mathcal{S}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel (on considère ici des fonctions à valeurs complexes).

Exemple 8.1.2.
1. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$.*
2. *Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\ z > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-z|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}$.*
3. *Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-z|x|^2}$ avec $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ z > 0$ et P une fonction polynômiale, sont dans* S.

Remarque 8.1.3. *Dans la définition 8.1.1, nous aurions pu remplacer (8.2) par la condition*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = 0.$$

Avant de définir la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ nous donnons encore quelques propriétés de cet espace. Commençons par le munir d'une topologie. Pour cela on défini les semi-normes

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \forall f \in \mathcal{S},\ p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|. \tag{8.3}$$

Muni de cette famille de semi-normes, $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel métrisable et complet. On a alors les propriétés suivantes que nous ne démontrerons pas.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les applications $f \mapsto x^\alpha f$ et $f \mapsto \partial^\alpha f$ sont continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.
2. Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$ (c'est une conséquence de la formule de Leibniz).
3. L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}$.
4. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.

8.1.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On remarque que, pour $f \in \mathcal{S}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. La définition qui suit a donc bien un sens.

Définition 8.1.4. *Pour $f \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ est la fonction définie par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{R^d} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x$$

où pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots x_d\xi_d$.

Commençons par calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne. Cet exemple est essentiel non seulement dans un cadre théorique pour obtenir la formule d'inversion de Fourier, mais aussi dans diverses applications, comme dans le calcul des probabilités (voir théorème de Lévy ou le Théorème Central Limite).

Exemple 8.1.5. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$. Soit $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-z|x|^2}$. Alors $f \in \mathcal{S}$ et*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4z}}. \tag{8.4}$$

Etape 1. *On commence par effectuer le calcul dans le cas où $d = 1$ et $z = \lambda > 0$ est réel. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et*

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} -\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

L'usage du théorème est justifié par domination à l'aide de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ qui décroît plus vite à l'infini que n'importe quel polynôme et en particulier $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Comme $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x$$

et une intégration par parties montre que

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

Ainsi $\hat{f}$ est solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\xi}{2\lambda}\hat{f}$ avec comme condition initiale $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est bien

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}.$$

Etape 2. *On passe au cas où $d \geq 1$ et $z = \lambda > 0$ est réel. Le résultat est alors une conséquence directe du théorème de Fubini :*

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\mathrm{d}x = \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1}\mathrm{e}^{-\lambda x_1^2}\mathrm{d}x_1\right)\cdots\left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_d\xi_d}\mathrm{e}^{-\lambda x_d^2}\mathrm{d}x_d\right),$$

ce qui donne, par propriété de morphisme de l'exponentielle, la formule voulue.

Etape 3. *La formule s'étend à l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z > 0\}$ par prolongement analytique.*

La formule donnée dans cet exemple se généralise ainsi : soit une matrice réelle symétrique $A \in \mathcal{S}_\mathrm{d}(\mathbb{R})$ définie positive. Si on considère la densité Gaussienne centrée

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(A)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)},$$

alors $G_A \in \mathcal{S}$ et on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(G_A)(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}.$$

Cela s'obtient à partir de la formule que l'on a démontré en diagonalisant A en base orthonormée.

À l'aide de la transformée de Fourier de la Gaussienne, nous pouvons à présent démontrer le théorème d'inversion de Fourier dans le cadre de la classe de Schwartz.

Théorème 8.1.6. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est une application linéaire bijective, continue et d'inverse continu. Son inverse $\overline{\mathcal{F}}$ est donné par*

$$\forall g \in \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} g(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{8.5}$$

Remarque 8.1.7. *La formule (8.5) peut s'écrire :*

$$\forall g \in \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(g)(-x).$$

Remarque 8.1.8. *Ce théorème montre en particulier que $\mathcal{S}$ est bien invariant par transformée de Fourier, comme nous l'avons souhaité lors de sa construction.*

Démonstration : Montrons tout d'abord que $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ envoient $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. Comme pour tout $g \in \mathcal{S}$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(g)(-x)$, il suffit de le montrer pour $\mathcal{F}$.

Tout d'abord, $\mathcal{F}(g) \in C^\infty$ si $g \in \mathcal{S}$. En effet, pour x fixé, la fonction $\xi \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} g(x)$ est de classe C^∞ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$,

$$|\partial_\xi^\beta (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} g(x))| = |(-\mathrm{i}x)^\beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} g(x)| = |x^\beta g(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral de manière récurrente. De plus :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d,\ \forall g \in \mathcal{S},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} (-\mathrm{i}x)^\beta g(x) \mathrm{d}x.$$

On montre ensuite, par intégrations par parties successives, que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} ((-D_x)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi})((-\mathrm{i}x)^\beta g(x)) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} D_x^\alpha ((-\mathrm{i}x)^\beta g(x)) \mathrm{d}x$$

où l'on a utilisé la notation $D_j = \frac{1}{\mathrm{i}} \partial_{x_j}$ et $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$. On en déduit que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha (x^\beta g(x))| \mathrm{d}x < +\infty.$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}$ et que l'application $g \mapsto \mathcal{F}(g)$ est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ par la formule de Leibniz.

Il nous reste à prouver que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}g = g$ pour tout $g \in \mathcal{S}$. Pour cela il faudrait pouvoir considérer l'intégrale $\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi} g(y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}\xi$. Mais, la fonction $(y,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}^d_y \times \mathbb{R}^d_\xi)$ et on ne peut donc pas intervertir les intégrales par Fubini. On va procéder par approximation. On remarque que, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Or, la fonction $(y,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d_y \times \mathbb{R}^d_\xi)$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut donc lui appliquer le théorème de Fubini et obtenir :

$$I_\varepsilon = \int \left(\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\right) g(y)\mathrm{d}y.$$

D'après la formule (8.4), on a

$$I_\varepsilon = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^d \int \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}} g(y)\mathrm{d}y = \pi^{\frac{d}{2}}2^d \int \mathrm{e}^{-|z|^2} g(x - 2\sqrt{\varepsilon}z)\mathrm{d}z.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \pi^{\frac{d}{2}}2^d g(x) \int \mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{d}z = (2\pi)^d g(x).$$

D'où, $\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d g(x)$ et $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathrm{Id}_\mathcal{S}$. On montre de même que $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}_\mathcal{S}$.

□

Il est courant de noter $\check{g}$ la fonction $x \mapsto g(-x)$. Avec cette notation, la relation d'inversion de Fourier s'écrit :

$$\mathcal{F}\mathcal{F}g = (2\pi)^d\check{g}.$$

8.1.3 Propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Nous commençons par présenter la propriété fondamentale de la transformée de Fourier : elle échange la dérivation et la multiplication algébrique. C'est cette propriété qui justifie le rôle fondamental de la transformée de Fourier dans l'étude des EDPs à coefficients constants.

Théorème 8.1.9. *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors,*

1. *la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et on a, pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$,*

$$\forall\xi \in \mathbb{R}^d,\ \partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(-\mathrm{i}x_j f)(\xi). \tag{8.6}$$

2. *Pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$,*

$$\forall\xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\partial_{x_i} f)(\xi) = \mathrm{i}\xi_j\mathcal{F}(f)(\xi). \tag{8.7}$$

Démonstration : La fonction $(x,\xi) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$,

$$|\partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x))| = |-\mathrm{i}x_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)| = |x_j f(x)|$$

et $x \mapsto x_j f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ car $f \in \mathcal{S}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir

$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} -\mathrm{i}x_j\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x$$

ce qui établit le premier point.
Pour montrer le second point, intégrons pas parties par rapport à x_j :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j}f(x)\mathrm{d}x_j = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\right]_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty} - \int_{\mathbb{R}}(\partial_{x_j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi})f(x)\mathrm{d}x_j = \mathrm{i}\xi_j\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x_j$$

car $x_j \mapsto f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_d)$ tend vers 0 lorsque $|x_j| \to +\infty$ puisque $f \in \mathcal{S}$. Puis, comme $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j}f(x)| = |\partial_{x_j}f(x)|$ et que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, de même que $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)$, on peut intégrer l'égalité issue de l'intégration par parties selon les variables autres que x_j pour obtenir, via Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j}f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi_j\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x,$$

ce qui prouve le second point.

□

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ échange donc dérivation et multiplication par x. Par conséquent, $\mathcal{F}$ échange régularité et décroissance à l'infini : plus une fonction est dérivable, plus vite sa transformée de Fourier décroît à l'infini. On retrouve en particulier l'invariance de la classe de Schwartz par $\mathcal{F}$.

Passons à présent aux propriétés hilbertiennes de la transformée de Fourier. Le théorème de Plancherel qui suit énonce un principe de conservation de l'énergie lorsque l'on passe de l'espace classique à l'espace de Fourier et justifie le fait que du point de vue physique, on ne "perd" rien à passer dans l'espace de Fourier.

Théorème 8.1.10. *Soient f et g dans $\mathcal{S}$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x \tag{8.8}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{8.9}$$

En particulier pour $f = g$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi. \tag{8.10}$$

Démonstration : Le premier point est une application directe de la définition de la transformée de Fourier et du théorème de Fubini. Les fonctions dans l'intégrale double étant dans $\mathcal{S}$, elles sont intégrables.
On applique alors (8.8) aux fonctions f et $h = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\hat{g}}$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)h(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{h}(x)\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs,

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int e^{-ix\cdot\xi}\overline{\hat{g}}(\xi)d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\int e^{ix\cdot\xi}\hat{g}(\xi)d\xi} = \overline{\overline{\mathcal{F}}\hat{g}(x)} = \overline{g}(x).$$

D'où le résultat.

La dernière identité est alors évidente.

□

Voyons à présent comment la transformée de Fourier se comporte vis-à-vis des translations avant de voir la relation entre produit de convolution et transformée de Fourier.

Proposition 8.1.11. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Si $\tau_a : x \mapsto x + a$, alors pour toute $f \in \mathcal{S}$, $(\tau_a)_* f = f \circ \tau_{-a}$ a pour transformée de Fourier*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}((\tau_a)_* f)(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Réciproquement,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(e^{ia\cdot x} f)(\xi) = (\tau_a)_*(\mathcal{F}(f))(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi - a).$$

Démonstration : Pour le premier point, on effectue le changement de variables $z = x - a$ dans l'intégrale de Fourier

$$\mathcal{F}((\tau_a)_* f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x} f(x-a)dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot(z+a)} f(z)dz = e^{-i\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Le second point découle directement de la définition de la transformée de Fourier.

□

Proposition 8.1.12. *Soient f et g dans $\mathcal{S}$. Alors $f \star g \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$. Réciproquement, $\mathcal{F}(f\cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(f)\star\mathcal{F}(g)$.*

Démonstration : Rappelons tout d'abord la définition du produit de convolution pour deux fonctions, l'une intégrable et l'autre bornée :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f\star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy.$$

Cette définition est licite pour f et g dans $\mathcal{S}$. De plus, à y fixé, la fonction $x \mapsto f(y)g(x-y)$ est C^∞ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|\partial_x^\beta(f(y)g(x-y))| = |f(y)(\partial^\beta g)(x-y)| \leq C_{0,\beta}|f(y)|$ en reprenant les notations de la définition de $\mathcal{S}$. Or, $y \mapsto C_{0,\beta}|f(y)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, donc par dérivation sous le signe intégral, $f \star g$ est de classe C^∞ et $\partial^\beta(f\star g) = f\star(\partial^\beta g)$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Comme $x^\alpha = (x-y+y)^\alpha = \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma}$, on peut écrire

$$x^\alpha\partial^\beta(f\star g) = x^\alpha f\star(\partial^\beta g) = \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(x^{\alpha-\gamma}f)\star(x^\gamma\partial^\beta g)$$

et cette fonction est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'où $f\star g \in \mathcal{S}$. On peut alors appliquer le théorème de Fubini à la fonction intégrable $(x,y)\mapsto f(y)g(x-y)$ pour obtenir, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f\star g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(y)g(x-y)dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x-y)\cdot\xi}g(x-y)dx\right)dy \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi).\end{aligned}$$

On a donc obtenu le premier point. Pour le second nous allons utiliser la transformée de Fourier inverse. On applique le premier point à $\varphi = \mathcal{F}(f)$ et $\psi = \mathcal{F}(g)$. Alors, $\hat{\varphi} = (2\pi)^d \check{f}$ et $\hat{\psi} = (2\pi)^d \check{g}$ d'où :

$$\mathcal{F}(\varphi\psi) = \mathcal{F}(\hat{f} \cdot \hat{g}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \star g)) = (2\pi)^d f \check{\star} g.$$

Or, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}(f \check{\star} g)(\xi) = (f \star g)(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\eta) g(-\xi - \eta) \mathrm{d}\eta &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(-\eta) \hat{\psi}(\xi + \eta) \mathrm{d}\eta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\eta) \hat{\psi}(\xi - \eta) \mathrm{d}\eta = \frac{1}{(2\pi)^{2d}} (\hat{\varphi} \star \hat{\psi})(\xi).\end{aligned}$$

Cela prouve le second point car $\mathcal{F}$ est une permutation de $\mathcal{S}$.

□

8.2 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées

Pour pouvoir définir la transformée de Fourier d'une fonction, il nous a fallu contrôler sa croissance à l'infini. C'est la cas pour une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou dans $\mathcal{S}$. Par contre, il n'est pas possible de définir cette transformée pour une fonction seulement localement intégrable. Il en résulte que par dualité, nous n'allons pas pouvoir définir la transformée de Fourier sur tout $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mais seulement sur l'un de ses sous-espaces, celui des distributions dites tempérées.

Définition 8.2.1. *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$. Plus précisément, une forme linéaire $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est une distribution tempérée si et seulement si*

$$\exists k, l \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{S},\ |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi) \tag{8.11}$$

où les $p_{\alpha,\beta}$ sont définies en (8.3). On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Remarque 8.2.2. *Comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$, toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ définit par restriction une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Cette forme linéaire est bien dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ puisque pour tout compact K, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $C_{K,\alpha} > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans K, $p_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq C_{K,\alpha} \sup_K |\partial^\beta \varphi|$.*
De plus, cette identification à un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est licite car l'application $T \mapsto T|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$ est injective car si $T|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$, alors $T = 0$ sur $\mathcal{S}$ par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}$. On a donc

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Exemple 8.2.3.
1. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder.*
2. *Toute fonction continue à croissance polynômiale définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$.*
3. *Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une suite à croissance polynômiale,* i.e. *telle qu'il existe $p \geq 0$, $a_k = \mathcal{O}(|k|^p)$ lorsque k tend vers l'infini. Alors la distribution sur $\mathbb{R}$,*

$$T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

est tempérée. En effet, il existe $C > 0$ et $p \geq 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \leq C(1+|k|^{2p})$. Alors, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}|\langle T,\varphi\rangle| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k||\varphi(k)| \\ &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1+k^{2p})|\varphi(k)| \\ &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k^2}(1+k^2+k^{2p}+k^{2p+2})|\varphi(k)| \\ &\leq C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k^2}\sum_{i\leq 2p+2} p_{i,0}(\varphi)\end{aligned}$$

et $C' = C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{1+k^2} < +\infty$.

4. *La distribution définie par la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ n'est pas tempérée. En effet, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0,2]$ et valant 1 sur $[\frac{1}{2},1]$. Pour $j \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_j(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\psi\left(\frac{x}{j}\right)$. Alors $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$. Pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}|x^\alpha\varphi_j^{(\beta)}(x)| &= \left|\sum_{\gamma=0}^{\beta}\binom{\beta}{\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right)^\gamma x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{j^{\beta-\gamma}}\psi^{(\beta-\gamma)}\left(\frac{x}{j}\right)\right| \\ &\leq C_{\alpha,\beta}\sup_{x\geq 0} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sum_{\gamma=0}^{\beta}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi^{(\beta-\gamma)}(x)| := M_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

Or,

$$\langle T_{\mathrm{e}^\cdot},\varphi_j\rangle = \int_0^{2j}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\psi\left(\frac{x}{j}\right)\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{j}{2}}^{j}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{j}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{j}{2}}-1)\xrightarrow[j\to+\infty]{}+\infty.$$

Donc $T_{\mathrm{e}^\cdot}$ n'est pas tempérée.
De même, pour tout $\varepsilon > 0$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\varepsilon|x|} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

5. *Toutefois, pour appartenir à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il n'est pas nécessaire d'être majoré par un polynôme. Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$. Alors $|f(x)| = \mathrm{e}^x$, mais $f(x) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ car $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Intuitivement, ce sont les oscillations rapides de la fonction qui compensent le comportement exponentiel (donc non tempéré) du module de la fonction.*

Voyons à présent les liens entre opérations sur les distributions et distributions tempérées.

Proposition 8.2.4. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

1. *Pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$, $\partial_{x_j}T$ et x_jT sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donc, si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $P\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Pour toute fonction f à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

Nous terminons cette section par la définition de la notion de convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 8.2.5. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions tempérées converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque :*

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_n,\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T,\varphi\rangle.$$

Tout comme dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la convergence est compatible avec les opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées.

8.3 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

8.3.1 Définition et propriétés

Nous avons déjà démontré au théorème 8.1.10 que pour toute paire de fonctions f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(g)(x)\mathrm{d}x.$$

Cette identité nous suggère de définir de manière analogue la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Définition 8.3.1. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de T, notée $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$ est la distribution tempérée définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle.$$

La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec celle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour une distribution tempérée de la forme T_f avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On définit de manière analogue la transformation $\overline{\mathcal{F}}$.

Appliquer la transformée de Fourier à une distribution tempérée revient à l'appliquer à des fonctions tests dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il est donc naturel que toutes les propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se transposent au cadre des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 8.3.2. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire, continue, bijective et de réciproque continue. De plus, $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration : C'est une conséquence du théorème 8.1.6. En effet, on a, pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$. Puis, si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \mathcal{F}T_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \mathcal{F}\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle.$$

De même pour $\overline{\mathcal{F}}$, la réciproque de $\mathcal{F}$.

□

Proposition 8.3.3. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a :*

1. *$\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^d \check{T}$, où pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, $\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*
2. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(\partial_{x_j} T) = \mathrm{i}\xi_j \mathcal{F}T$.*
3. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(x_j T) = \mathrm{i}\partial_{\xi_j} \mathcal{F}T$.*
4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$, $\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot\xi}\mathcal{F}T$.*
5. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\cdot x}T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a$.*

Démonstration : Le premier point est une conséquence immédiate du théorème 8.3.2. Les deuxièmes et troisièmes points sont directement obtenus à partir des résultats du théorème 8.1.9. Les quatrièmes et cinquièmes points sont une conséquence de la proposition 8.1.11.

□

Pour le moment, nous ne traduisons pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ les relations entre transformée de Fourier et convolution données dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Cela fera l'objet d'une section du chapitre 7.

Exemple 8.3.4. 1. *On a* $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. *En effet,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S},\ \langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}\varphi\rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \int \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi\rangle.$$

2. *En combinant avec la translation* τ_a, *on obtient, pour tout* $a \in \mathbb{R}^d$ *et tout* $\xi \in \mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}\delta_a)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}$. *Nous verrons au chapitre 6 que cette écriture a bien un sens puisque la transformée de Fourier d'une distribution à support compact est toujours une distribution associée à une fonction de classe* C^∞ *(et même analytique).*
3. *On a* $\mathcal{F}1 = (2\pi)^d\delta_0$. *En effet,* $\mathcal{F}1 = \mathcal{F}\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^d\check{\delta}_0 = (2\pi)^d\delta_0$.
4. *Soient* $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$ *et* $\xi \in \mathbb{R}^d$. *Alors :*

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_0)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \ \ \textit{et}\ \ (\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_a)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}.$$

Cela découle directement de la proposition 8.3.3.

5. *Soit* $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. *Montrons tout d'abord que* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. *Soit* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Alors, en posant pour tout* $\varepsilon > 0$, $I_\epsilon = \int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$, *on a*

$$I_\varepsilon = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x := J_\varepsilon + K.$$

Par Taylor à l'ordre 1, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ *avec* $|\psi(x)| \leq ||\varphi'||_\infty$. *Comme par imparité,* $\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{\varphi(0)}{x}\mathrm{d}x = 0$, *on a* $I_\varepsilon = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\psi(x)\mathrm{d}x + K$. *Comme* ψ *est continue sur* $\mathbb{R}$, *par le théorème de convergence dominée,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_{|x|\leq 1}\psi(x)\mathrm{d}x + \int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

On en déduit que :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C||\varphi'||_\infty + \left(\int_{|x|\geq 1}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x\right)\sup_{x\in\mathbb{R}}|x\varphi(x)|.$$

Donc, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. *Calculons alors* $\hat{T}$. *On part de l'égalité* $xT = 1$. *Alors,* $\mathcal{F}(xT) = 2\pi\delta_0$ *soit encore* $\mathrm{i}\partial_\xi\hat{T} = 2\pi\delta_0$. *Par intégration, si* H *désigne la distribution de Heaviside, il existe* $C \in \mathbb{R}$, $\hat{T} = -2\mathrm{i}\pi H + C$. *Or, comme* T *est impaire,* $\hat{T}$ *aussi et* $-2\mathrm{i}\pi + C = -C$ *soit encore* $C = \mathrm{i}\pi$. *On obtient donc*

$$\mathcal{F}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = -2\mathrm{i}\pi H + \mathrm{i}\pi.$$

6. *On reprend les notations de l'exemple précédent. Alors,* $\mathcal{F}\mathcal{F}T = 2\pi\check{T} = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. *Donc,* $-2\mathrm{i}\pi\mathcal{F}H + \mathrm{i}\pi 2\pi\delta_0 = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. *On en déduit que*

$$\mathcal{F}H = -\mathrm{i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0.$$

8.3.2 Transformée de Fourier des distributions à support compact

Bien entendu, nous avons toujours $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Nous pouvons donc voir ce que l'on obtient lorsque l'on applique la transformée de Fourier à une distribution à support compact. La décroissance à l'infini étant maximale pour une telle distribution, on s'attend à obtenir une régularité maximale.

Théorème 8.3.5. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $e_\xi : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. La distribution tempérée $\mathcal{F}T$ est la distribution associée à la fonction $\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi}\rangle$. Cette fonction, notée $\xi \mapsto \mathcal{F}T(\xi)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et est à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées.*

Remarque 8.3.6. *Cela justife le fait que l'on ait pu considérer des valeurs ponctuelles pour les transformées de Fourier du Dirac et de ses dérivées qui sont des distributions à support compact.*

Démonstration : Nous allons utiliser les résultats de dérivation et d'intégration sous le crochet. Par intégration sous le crochet, on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\big\langle \langle T, e_{-\xi}\rangle, \varphi\big\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, e_{-\xi}\rangle \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} e_{-\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle.$$

Puis, comme la fonction $(x,\xi) \mapsto e_{-\xi}(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, par théorème de dérivation sous le crochet, $\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi}\rangle$ est de classe C^∞ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}T(\xi) = \partial_\xi^\alpha \langle T, e_{-\xi}\rangle = \langle T, \partial_\xi^\alpha e_{-\xi}\rangle.$$

Enfin, par définition d'une distribution et comme T est à support compact, si p est l'ordre de T et $R > 0$ est tel que $\operatorname{supp} T \subset B(0,R)$,

$$\begin{aligned} |\langle T, e_{-\xi}\rangle| &\le C \max_{|\alpha|\le p} \sup_{|x|\le R} |\partial_x^\alpha e_{-\xi}(x)| \\ &= C \max_{|\alpha|\le p} \sup_{|x|\le R} |(i\xi)^\alpha e_{-\xi}(x)| \\ &= C \max_{|\alpha|\le p} |\xi^\alpha| \le C\left(\frac{1+|\xi|}{2}\right)^p. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}T$ est à croissance polynômiale. Il en est de même de toutes ses dérivées puisque $\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}T = \mathcal{F}((-\mathrm{i}x)^\alpha T)$ et que la distribution $(-\mathrm{i}x)^\alpha T$ est aussi à support compact.

□

8.3.3 Convolution et transformée de Fourier

Nous allons voir que la transformée de Fourier permet de transformer le produit de convolution en produit ponctuel. Nous l'avons déjà vu dans le cas des fonctions de la classe de Schwartz, nous allons à présent étendre cette propriété au cas des distributions tempérées.

Théorème 8.3.7. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T \star S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}(T \star S) = \mathcal{F}T\mathcal{F}S$.*

Démonstration : Remarquons tout d'abord que l'expression $\mathcal{F}T\mathcal{F}S$ a bien un sens puisque d'après le théorème 8.3.5, $\mathcal{F}S$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées et que $\mathcal{F}T$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Supposons tout d'abord le cas plus simple où $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T \star S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}T$ et $\mathcal{F}S$ sont de classe C^∞. D'autre part, si $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(T\star S)(\xi) &= \langle T\star S, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\cdot,\xi)}\rangle \\ &= \langle T_y \otimes S_z, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y+z,\xi)}\rangle \\ &= \langle T_y, \langle S_z, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z,\xi)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y,\xi)}\rangle\rangle \\ &= \langle T_y, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y,\xi)}\rangle\langle S_z, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z,\xi)}\rangle \\ &= \mathcal{F}T(\xi)\mathcal{F}S(\xi).\end{aligned}$$

Pour passer au cas où $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on utilise le résultat suivant : il existe une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est une fonction plateau valant 1 pour $|x| \leq 1$ et 0 pour $|x| \geq 2$, on pose pour tout $n \geq 1$, $T_n = \theta\left(\frac{\cdot}{n}\right) T$. Alors, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}|\langle T_n - T, \varphi\rangle| &= \left|\langle T, \left(\theta\left(\frac{\cdot}{n}\right) - 1\right)\varphi\rangle\right| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta|\leq l} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \partial^\beta \left(\left(\theta\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right)\varphi(x)\right)\right| \\ &\leq \frac{C'}{n} p_{k',l'}(\varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{F}T_n$ tend vers $\mathcal{F}T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par continuité de la transformée de Fourier.

Or, pour tout $n \geq 1$, d'après le premier cas traité, $\mathcal{F}(T_n \star S) = \mathcal{F}T_n\mathcal{F}S$ et comme $\mathcal{S}$ est à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, on a que $\mathcal{F}T_n\mathcal{F}S$ tend vers $\mathcal{F}T\mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Posons $U = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T\mathcal{F}S) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$T_n \star S = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T_n\mathcal{F}S) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T\mathcal{F}S) = U \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, par continuité du produit de convolution, $T_n \star S \to T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On en déduit par unicité de la limite que $T \star S = U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathcal{F}(T\star S) = \mathcal{F}U = \mathcal{F}T\mathcal{F}S$, ce qui prouve le résultat voulu.

$\square$

Nous pouvons énoncer un autre cas qui n'est pas couvert par le théorème précédent. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut poser :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T\star\varphi)(x) = \langle T, \varphi(x-\cdot)\rangle.$$

En effet, $T\star\varphi$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et par dérivation sous le crochet elle vérifie, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\partial_x^\alpha(T\star\varphi)(x) = \langle T, \partial^\alpha\varphi(x-\cdot)\rangle$. On a alors

Proposition 8.3.8. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $T\star\varphi \in C^\infty \cap \mathcal{S}'$ et*

$$\mathcal{F}(T\star\varphi) = \hat{\varphi}\mathcal{F}T.$$

8.3.4 Transformée de Fourier partielle et applications

Dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d$, nous noterons (t,x) où $t \in \mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^d$ la variable. Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$, on définit la transformation de Fourier partielle en x par la formule

$$\tilde{\mathcal{F}}(\varphi)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x.\xi}\varphi(t,x)\mathrm{d}x. \tag{8.12}$$

Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ définit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$ dans lui-même d'inverse

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d),\ \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\psi(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x.\xi}\psi(t,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Par dualité, on peut alors définir $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$ par

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d),\ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d),\ \langle \tilde{\mathcal{F}}T, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{\mathcal{F}}\varphi\rangle.$$

Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est un isomorphisme bicontinu (pour la convergence des suites) de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$ dans lui-même. De plus, on a les formules

$$\tilde{\mathcal{F}}(D_x^\alpha T) = \xi^\alpha \tilde{\mathcal{F}}T, \tag{8.13}$$

avec $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_d}^{\alpha_d}$ et pour tout j, $D_{x_j} = \frac{1}{\mathrm{i}}\partial_{x_j}$,

$$\tilde{\mathcal{F}}(x^\alpha T) = (-D_\xi)^\alpha \tilde{\mathcal{F}}T, \tag{8.14}$$

et

$$\tilde{\mathcal{F}}(D_t^\beta u) = D_t^\beta \tilde{\mathcal{F}}u. \tag{8.15}$$

Exemple 8.3.9. *Calculons $\tilde{\mathcal{F}}\delta_{(0,0)}$. On a pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d)$,*

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}\delta_{(0,0)}, \varphi\rangle = \langle \delta_{(0,0)}, \tilde{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \tilde{\mathcal{F}}(\varphi)(0,0) = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi(0,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

D'où

$$\tilde{\mathcal{F}}\delta_{(0,0)} = \delta_{t=0}\otimes 1_\xi.$$

Nous allons voir comment appliquer cela à la recherche de solutions élémentaires d'opérateurs classiques de la physique.

Opérateur de la chaleur. Soit $P = \partial_t - \Delta_x$ agissant sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. On cherche à résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ l'équation $PE = \delta_0$ d'inconnue E, avec E à support dans $\{(t,x)\ :\ t \geq 0\}$. Par transformée partielle de Fourier, cela revient à résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ $(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{E} = \delta_{t=0}\otimes 1_\xi$ où l'on a posé $\tilde{E} = \tilde{\mathcal{F}}E$.
Hors de $t = 0$, $\tilde{E}$ est solution de l'équation différentielle $(\partial_t + |\xi|^2)\tilde{E} = 0$. Cette équation admet des solutions de la forme $\xi \mapsto a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$. On cherche alors une fonction a telle que $\tilde{E}(t,\xi) = H(t)a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$ soit solution de notre équation initiale, où H désigne la fonction de Heaviside, indicatrice de $[0, +\infty[$. Or, on a :

$$\partial_t\tilde{E}(t,\xi) = -|\xi|^2 H(t)a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2} + a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}\delta_{t=0}\otimes 1_\xi = -|\xi|^2 H(t)a(\xi)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2} + \delta_{t=0}\otimes a(\xi).$$

Il suffit donc de prendre $a(\xi) = 1$, *i.e.* $\tilde{E}(t,\xi) = H(t)\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$. Cette formule définie bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ qui appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $t > 0$. Par inversion de Fourier

($\tilde{\mathcal{F}}\tilde{\mathcal{F}}T = (2\pi)^d \check{T}$), on obtient $(2\pi)^d \check{E} = H(t)\tilde{\mathcal{F}}\mathrm{e}^{-t|\xi|^2}$. Par la transformée de Fourier de la Gaussienne dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (voir Exemple 8.4), on a

$$(2\pi)^d \check{E} = H(t)\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Alors, $\check{E} = E$ et on a finalement,

$$E = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Opérateur des ondes. On cherche $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ à support dans $\{(t,x) \ : \ t \geq 0\}$ telle que $\Box E = \delta_0$ où $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$ est le d'Alembertien dans $\mathbb{R}_t\mathbb{R}_x^d$. Il est équivalent de résoudre $\tilde{\mathcal{F}}\Box E = \tilde{\mathcal{F}}\delta_0$, soit encore

$$(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E} = \delta_{t=0} \otimes 1_{\xi}.$$

Hors de $t = 0$, la distribution $\tilde{E}$ est solution de l'équation $(\partial_t^2 + |\xi|^2)\tilde{E} = 0$. C'est une équation différentielle en t qui admet des solutions de la forme $t \mapsto a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)$. Pour satisfaire la condition de support, on cherche $\tilde{E}$ sous la forme

$$\tilde{E}(t,x) = H(t)(a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\partial_t\tilde{E} &= \delta_{t=0}(a(\xi)\cos(t|\xi|) + b(\xi)\sin(t|\xi|)) + H(t)(-a(\xi)|\xi|\sin(t|\xi|) + b(\xi)|\xi|\cos(t|\xi|))\\ &= H(t)(-a(\xi)|\xi|\sin(t|\xi|) + b(\xi)|\xi|\cos(t|\xi|)) + \delta_{t=0} \otimes a(\xi).\end{aligned}$$

De même,

$$\partial_t\tilde{E} = H(t)(-a(\xi)|\xi|^2\cos(t|\xi|) - b(\xi)|\xi|^2\sin(t|\xi|)) + \delta_{t=0} \otimes |\xi| b(\xi) + \delta_{t=0}^{'} \otimes a(\xi).$$

Pour que $\tilde{E}$ soit solution de notre équation, il suffit donc de prendre $a(\xi) = 0$ et $b(\xi) = \frac{1}{|\xi|}$. On obtient alors

$$\tilde{E}(t,x) = H(t)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}.$$

C'est une fonction de classe C^∞ en ξ et telle que $|\tilde{E}(t,\xi)| \leq \max(t,0)$, c'est donc un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Par transformée de Fourier inverse on obtient une solution élémentaire E de $\Box$ définie par

$$E = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left(H(t)\frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\right).$$

8.3.5 Retour à la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$

Nous avons déjà vu que $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ sont contenus dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Voyons les propriétés particulières de la transformée de Fourier sur ces deux sous-espaces.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Posons

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x} f(x)\mathrm{d}x.$$

Alors $\hat{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, qui tend vers 0 à l'infini et dont une borne est donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\hat{f}(\xi)| \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

De plus, la distribution T_f est tempérée et on a :

$$\mathcal{F}T_f = T_{\hat{f}}.$$

En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y} \varphi(y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Or, la fonction $(x, y) \mapsto f(x)\varphi(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ donc on peut appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y} f(x) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \hat{f}(y) \mathrm{d}y,$$

d'où le résultat annoncé.

Par ailleurs, on obtient aussi la formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et si $\hat{f}$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}\hat{f} = (2\pi)^d \check{f}$ presque partout.
En effet, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^d \check{T}_f$ et comme $\hat{f}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, les deux membres sont des fonctions de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, donc l'égalité a lieu presque partout.

Passons au cas de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Commençons par montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}T_f$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{S}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (car $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$), il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f pour la norme de $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\langle \mathcal{F}T_{f_n}, \varphi \rangle| = |\langle T_{f_n}, \mathcal{F}\varphi \rangle| \le ||f_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)} ||\mathcal{F}\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{8.16}$$

avec $C = (2\pi)^d \sup_{n\ge 0} ||f_n||_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \infty$, constante déduite de l'utilisation du théorème de Plancherel (voir théorème 8.1.10). Le sup sur n est bien fini car la suite converge.
Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, elle converge aussi dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de sorte que, par continuité de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}T_{f_n}$ tend vers $\mathcal{F}T_f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En faisant tendre n vers l'infini dans (8.16) on obtient

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle| \le C||\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{8.17}$$

Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, l'inégalité (8.17) s'étend à toute fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, $\mathcal{F}T_f$ se prolonge par continuité en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Le théorème de représentation de Riesz implique alors l'existence d'un élément $\hat{f}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle = (\hat{f}, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

On peut donc identifier $\mathcal{F}T_f$ à la fonction $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et ainsi $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d)) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Or, d'après l'inversion de Fourier pour les distributions tempérées,

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))) \subset \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d)),$$

d'où

$$\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d)) = L^2(\mathbb{R}^d).$$

De plus, $\mathcal{F}$ induit un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Enfin, l'égalité de Plancherel étant valable dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, par densité, elle est aussi valable sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que l'application $f \mapsto (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\hat{f}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Chapitre 9

Solutions élémentaires d'EDPs

9.1 Théorèmes d'existence

9.1.1 Définitions et premières propriétés

Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$ un polynôme à d variables. Dans la base canonique de $\mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$, P se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha X^\alpha, \quad \text{avec } a_\alpha \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}.$$

L'entier m est appelé le degré de P.

Définition 9.1.1. *On appelle opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ associé à $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$, l'application linéaire notée $P(\partial)$ et définie par :*

$$P(\partial) : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\Omega) & \to & \mathcal{D}'(\Omega) \\ T & \mapsto & P(\partial)T = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha T \end{array}$$

Définition 9.1.2. *On appelle équation aux dérivées partielles (EDP en abrégé) linéaire à coefficients constants, toute équation de la forme $P(\partial)T = F$ où $P(\partial)$ est un opérateur différentiel sur $\mathcal{D}'(\Omega)$, $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est donnée et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est l'inconnue. Le degré m du polynôme P est appelé l'ordre de l'EDP.*

Exemple 9.1.3. *Nous donnons une liste d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 à coefficients constants.*

1. *L'équation de Laplace (ou de Poisson) de l'électrostatique : $\Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ associée au polynôme $P = X_1^2 + \cdots X_d^2$.*
2. *L'équation des ondes : $\partial_{tt}^2 T - \Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ pour $P = X_0^2 - X_1^2 - \cdots - X_d^2$.*
3. *L'équation de la chaleur : $\partial_t T - \Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ pour $P = X_0 - X_1^2 - \cdots - X_d^2$.*
4. *L'équation de Schrödinger : $\mathrm{i}\partial_t T - \Delta T = F$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d})$ pour $P = \mathrm{i}X_0 - X_1^2 - \cdots - X_d^2$.*

Vocabulaire. La distribution F est appelée second membre de l'EDP. Lorsque $F = 0$, on dit que l'EDP est homogène. Enfin, l'équation $P(\partial)T = 0$ est appelée équation homogène associée à $P(\partial)T = F$.

Proposition 9.1.4. *L'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants $P(\partial)T = F$ est soit l'ensemble vide, soit le sous-espace affine de $\mathcal{D}'(\Omega)$, $T_0 + \mathrm{Ker}\ P(\partial)$ où T_0 est une solution particulière de $P(\partial)T = F$.*

Démonstration : En effet, il s'agit du résultat général valable pour toute équation linéaire de la forme $u(x) = y$ où u est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. On remarque que Ker $P(\partial)$ n'est autre que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $P(\partial)T = F$. Compte tenu du théorème de Malgrange-Ehrenpreis énoncé plus loin, le cas où l'ensemble des solutions est vide ne peut se produire que lorsque $P = 0$ et $F \neq 0$.

□

Ce résultat nous amène à savoir d'une part résoudre l'équation homogène $P(\partial)T = 0$, d'autre part à trouver une solution particulière de $P(\partial)T = F$. Le fait que l'on travaille dans le cadre des distributions, où l'on dispose d'un produit de convolution possédant un élément neutre, nous permet de simplifier la recherche d'une solution particulière de $P(\partial)T = F$. Pour cela on utilise la notion de solution élémentaire.

Définition 9.1.5. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$. On dit qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution élémentaire de $P(\partial)$ lorsque $P(\partial)E = \delta_0$.*

On parle aussi de "solution fondamentale de $P(\partial)$", ou de "fonction de Green de $P(\partial)$".

On remarque que si E est une solution élémentaire de $P(\partial)$, on obtient toutes les autres en ajoutant à E une solution quelconque T de l'équation homogène $P(\partial)T = 0$.

9.1.2 Existence de solutions

Nous commençons pas énoncer un théorème général d'existence de solutions élémentaires.

Théorème 9.1.6 (Malgrange-Ehrenpreis (1955))**.** *Tout opérateur aux dérivée partielles à coefficients constants non nul admet une solution élémentaire.*

Démonstration : Ce théorème difficile est admis. Pour une démonstration, on renvoie à [4, Theorem 7.3.10, p189] ou [6, Theorem IX.23, p48]. Dans les deux cas, les démonstrations reposent sur des propriétés de la tranformée de Fourier et sur les propriétés des fonctions holomorphes.

□

Remarque. On peut prouver que si le degré de l'EDP est au moins égal à 1, alors la solution élémentaire ne peut être à support compact.

Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Par le théorème de Malgrange-Ehrenpreis, nous savons qu'il possède une solution élémentaire. Voyons comment construire alors une solution particulière de $P(\partial)T = F$.

Proposition 9.1.7. *Soit E une solution élémentaire de $P(\partial)$.*

1. *Pour toute $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact, il existe au moins une solution de $P(\partial)T = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T = E \star F$ en est une.*
2. *Pour toute $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ à support compact, il existe au plus une solution de $P(\partial)T = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega)$ et à support compact et, s'il en existe une, c'est $E \star F$.*

Démonstration : En effet, d'après les propriétés du produit de convolution, on peut écrire :

$$P(\partial)(E \star F) = (P(\partial)E) \star F = \delta_0 \star F = F.$$

Cela démontre le premier point. Si on suppose ensuite que T est une solution à support compact, on a :

$$T = \delta_0 \star T = (P(\partial)E) \star T = P(\partial)(E \star T) = E \star (P(\partial)T) = E \star F,$$

d'où la seconde assertion.

□

9.2 Théorème de régularité

Nous allons maintenant énoncer un théorème de régularité des solutions d'une EDP à coefficients constants.

Théorème 9.2.1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$. Si $P(\partial)$ possède une solution élémentaire dans $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ alors, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et pour toute $f \in C^\infty(\Omega)$, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution de $P(\partial)T = T_f$, il existe $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que $T = T_u$.*

Démonstration : Admis.

□

9.3 Exemples de solutions élémentaires

9.3.1 Problème du laplacien

Le laplacien sur $\mathbb{R}^d$, $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i x_i}$ a pour solution élémentaire, $E = xH$ lorsque $d = 1$, $E = \frac{1}{2\pi}\ln(|x|)$ lorsque $d = 2$ et

$$E = -\frac{1}{(d-2)S_{d-1}} \cdot \frac{1}{|x|^{d-2}},$$

où S_{d-1} désigne l'aire de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ de $\mathbb{R}^d$, lorsque $d \geq 3$. Ces trois fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donc toute solution de $\Delta u = f$ avec $f \in C^\infty$ est de classe C^∞. Il en résulte par exemple que les distributions harmoniques (*i.e.* les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $\Delta T = 0$) sont des fonctions C^∞.

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction radiale. Il existe alors $f : \mathbb{R}+ \ to\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $F(x) = f(|x|)$. On remarque que le Laplacien en coordonnées sphériques pour une fonction radiale est égal à

$$\Delta F = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{df}{dr}.$$

Ainsi, pour $d = 2$, on vérifie, que, hors de 0,

$$\frac{d \log r}{dr} = \frac{1}{r} \text{ et } \frac{d^2}{dr^2}(\log r) = -\frac{1}{r^2},$$

et, pour $d \geq 3$,

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{d-2}}\right) = -\frac{d-2}{r^{d-1}} \text{ et } \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r^{d-2}}\right) = +\frac{(d-1)(d-2)}{r^d}.$$

Ainsi l'équation est vérifiée sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ pour $d \geq 2$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^{d-2}}$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, donc définit une distribution d'ordre 0.

On définit, pour $d \geq 3$, la fonction ρ_ε égale à $\frac{1}{\varepsilon^{d-2}}$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$, et égale à r^{-d+2} pour $r \geq \varepsilon$. Cette fonction est continue et $\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} = -(d-2)r^{-d+1}$ pour $r > \varepsilon$ et est nulle pour $r < \varepsilon$. On considère alors la fonction radiale $R_\varepsilon : x \mapsto \rho_\varepsilon(|x|)$. On applique la formule des sauts, pour obtenir (utilisant la nullité de $\Delta\frac{1}{r^{d-2}}$ pour $r \neq 0$ et la continuité de ρ_ε en ε)

$$\begin{aligned}
\Delta R_\varepsilon &= \frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} \\
&= \Delta\frac{1}{r^{d-2}} + (\rho_\varepsilon(\varepsilon^+) - \rho_\varepsilon(\varepsilon^-))\delta'_{r=\varepsilon} + \left(\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(\varepsilon^+) - \frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(\varepsilon^-)\right)\delta_{r=\varepsilon} \\
&= -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\delta_{r=\varepsilon}. \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

Par passage en coordonnées sphériques, on trouve

$$\begin{aligned}
< \Delta R_\varepsilon, \varphi > &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(r)\right)\varphi(r,\omega)r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(r)\right) r^{d-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}r \\
&= < \Delta R_\varepsilon, r^{d-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma\right) >
\end{aligned}$$

La relation (9.1) entraine que

$$\begin{aligned}
< \Delta R_\varepsilon, \varphi > &= < \Delta R_\varepsilon, r^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma > \\
&= < -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\delta_{r=\varepsilon}, r^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma > \\
&= -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\varepsilon^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(\varepsilon,\omega)\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Par le TCD, on vérifie que la dernière intégrale tend vers $\varphi(0)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{d}\sigma = S_{d-1}\varphi(0)$.

Nous avons donc, au sens des distributions,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta R_\varepsilon = -(d-2)S_{d-1}\delta_0.$$

Ainsi

$$\Delta\left(-\frac{1}{(d-2)S_{d-1}|x|^{d-2}}\right) = \delta_0.$$

Le cas de $d = 2$ se traite en considérant, de même, la fonction $\tilde{\rho}_\varepsilon$ égale à $\log r$ pour $r \geq \varepsilon$ et à $\log\varepsilon$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon}{dr}\right) = (1-0)\delta_{r=\varepsilon},$$

ce qui permet d'écrire

$$\left\langle \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon}{dr}\right), \varphi\right\rangle = \int_0^{2\pi}\varepsilon\times\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\theta)d\theta \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2\pi\varphi(0).$$

On a ainsi $\Delta(\frac{1}{2\pi}\log|x|) = \delta_0$.

Enfin, par la dérivation usuelle des distributions :

$$(xH)'' = (H + xH')' = (H + x\delta_0)' = H' = \delta_0.$$

9.3.2 L'équation des ondes en dimension 1

On considère l'opérateur des ondes en $1D$, $P(\partial) = \partial^2_{tt} - \partial^2_{xx}$, associé au polynôme $P = X_1^2 - X_2^2$.

Soit la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t - |x| \le 0 \end{cases}.$$

Alors, E est une solution élémentaire de l'opérateur des ondes.

En effet, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et soit $A > 0$ tel que supp $\varphi \subset [-A, A]^2$. On a, en utilisant Fubini,

$$\begin{aligned}
< (\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E, \varphi > &= < E, (\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})\varphi > \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_0^A \int_{-t}^t \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t\varphi(x,x)\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 -\partial_t\varphi(x,-x)\mathrm{d}x - \int_0^A \partial_x\varphi(t,t) - \partial_x\varphi(-t,t)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t\varphi(u,u)\mathrm{d}u - \int_0^A \partial_x\varphi(u,u)\mathrm{d}u - \int_0^A \partial_t\varphi(-u,u)\mathrm{d}u + \int_0^A \partial_x\varphi(-u,u)\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)\mathrm{d}u - \int_0^A \phi_2'(u)\mathrm{d}u\right] \text{ avec } \phi_1(u) = \varphi(u,u) \text{ et } \phi_2(u) = \varphi(-u,u) \\
&= \frac{1}{2}\left[\phi_1(0) + \phi_2(0)\right] = \varphi(0,0) = < \delta_{(0,0)}, \varphi > .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E = \delta_{(0,0)}.$$

De là, si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, une solution de l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u = f$$

est donnée par $u = E \star f$.

Chapitre 10

Formule des sauts

10.1 Formule des sauts en dimension 1

Avant de traiter le cas compliqué, envisageons le cas de la dimension 1 d'espace. On se donne ainsi une fonction f, qui est de classe C^1 par morceaux dans $[a,b]$, et qui admet, en tout point où elle n'est pas continue, une limite à droite et une limite à gauche. Il existe ainsi une subdivision de $[a,b]$ en intervalles $[a,a_1[$, $]a_i,a_{i+1}[$, $]a_{i+1},b]$ telle que f soit de classe C^1 sur $]a_i,a_{i+1}[$. On note $f(a_i^+)$ et $f(a_i^-)$ les limites respectives à droite et à gauche au point a_i. Par convention, les points intérieurs à $[a,b]$ sont $a_1,..,a_n$ et on note $a_0=a, a_{n+1}=b$. La fonction f définit une distribution, dont on calcule la dérivée, que nous notons $(T_f)'$. Par définition, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi' >= - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx = \varphi(a_{i+1})f(a_{i+1}^-) - \varphi(a_i)f(a_i^+) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx,$$

où la fonction f' est définie presque partout, on a la relation

$$-\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=0}^{n} f(a_i^+)\varphi(a_i) - f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}).$$

Soit, en notant $T_{f'}$ la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i,a_{i+1}[$

$$< (T_f)', \varphi >=< T_{f'}, \varphi > + (f(a^+)-0) < \delta_a, \varphi > + (0-f(b^-)) < \delta_b, \varphi > + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+)-f(a_i^-)) < \delta_{a_i}, \varphi > .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 10.1.1. *La distribution $(T_f)'$ est donnée, à partir de $T_{f'}$ et des sauts de f, par*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

avec les conventions $a_0=a, a_{n+1}=b$, $f(a_0^-)=0$, $f(a_{n+1}^+)=0$.

Ce résultat s'étend aux dérivées successives, comme pour la dérivée seconde, en considérant les sauts de f et de la dérivée de f :

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta'_{a_i} + \sum_{i=0}^{n+1} (f'(a_i^+) - f'(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

On en déduit aussi la proposition :

Proposition 10.1.2. *Soit u une fonction C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$. On la prolonge par 0 à l'extérieur de $[a,b]$ et on note le prolongement $\underline{u}$. De même, on note $\underline{u}'$ le prolongement de la fonction u', défini par u' sur $]a,b[$ et par 0 à l'extérieur. Alors*

$$(T_{\underline{u}})' = T_{\underline{u}'} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b.$$

Cette proposition est le cas particulier où la fonction u est de classe C^1 par morceaux d'un résultat plus général.

Proposition 10.1.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g \in C(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$. Si $a, b \in I$, $a < b$, alors :*

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Nous avons ainsi trouvé la dérivée d'un prolongement par 0 en dimension 1.

10.2 Formule des sauts pour un demi-espace

On se donne une fonction $u(x', x_d)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$, et on souhaite calculer la dérivée de la distribution définie par $\underline{u}$ qui vaut u sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ et 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-$. On trouve ainsi

$$< \partial_{x_j}\underline{u}, \varphi >= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_j}\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x'$$

pour $1 \leq j \leq d$. Lorsque $j \neq d$, on a

$$\int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_j}\varphi(x)\mathrm{d}x_d = \partial_{x_j}[\int_0^{+\infty} u(x', x_d)\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d] - \int_0^{+\infty} \partial_{x_j}u(x', x_d)\varphi(x)\mathrm{d}x_d.$$

L'intégration du premier terme sur $\mathbb{R}$ dans la variable x_j donne 0 puisque φ est à support compact, ainsi on trouve, pour $j \neq d$

$$< \partial_{x_j}\underline{u}, \varphi >=< 1_{x_d \geq 0}\partial_{x_j}u, \varphi >$$

où on a noté par commodité $1_{x_d \geq 0}\partial_{x_j}u$ la distribution associée au prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-$ de la fonction $\partial_{x_j}u$ définie sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$. Cette distribution est définie par l'action de la fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, égale à $\partial_{x_j}u$ sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_+$ et à 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^*_-$, sur la fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à $1_{x_d \geq 0}\varphi(x', x_d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Lorsque $j = d$, on trouve

$$\begin{aligned} < \partial_{x_d}\underline{u}, \varphi > &= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_d}\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x', 0)\varphi(x', 0)\mathrm{d}x' + \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+} \partial_{x_d}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient le résultat :

Proposition 10.2.1. *Soit u définie comme ci-dessus. Ses dérivées sont données par*

$$\forall j \in \{1, \ldots d\},\ j \neq d,\ \partial_{x_j} \underline{u} = 1_{x_d \geq 0} \partial_{x_j} u$$

$$\text{et} \quad \partial_{x_d} \underline{u} = 1_{x_d \geq 0} \partial_{x_d} u + u(x', 0) \otimes \delta_{x_d = 0}.$$

La distribution $u(x', 0) \otimes \delta_{x_d=0}$ s'appelle distribution de simple couche. C'est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, donnée par

$$< u(x', 0) \otimes \delta_{x_d=0}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x', 0) \varphi(x', 0) \mathrm{d}x'.$$

10.3 Ouverts réguliers dans $\mathbb{R}^d$

10.3.1 Définition

Définition 10.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que Ω est de classe C^k s'il existe une fonction $\rho \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) < 0\}$$

et, si $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω et $\nabla\rho(x)$ le gradient de ρ en x, alors

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) = 0 \text{ et } \nabla\rho(x) \neq 0\}.$$

Remarque 10.3.2. *Il n'y a pas a priori, pour un ouvert Ω de classe C^k, unicité du choix de la fonction ρ.*

Définition 10.3.3. *On appelle ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^∞.*

Cette définition assure en particulier que Ω est situé localement du même côté de sa frontière, propriété utile pour définir la normale extérieure à Ω en chaque point de $\partial\Omega$.

Exemple 10.3.4. *Pour $R > 0$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| < R\}$ est un ouvert régulier. En effet, il suffit de prendre $\rho(x) = |x|^2 - R^2$. Il en est de même pour $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| > R\}$.*

Exemple 10.3.5. *Soit $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k. Posons*

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \ldots, x_{d-1})\}.$$

Alors Ω est un ouvert de classe C^k avec $\rho((x_1, \ldots, x_d)) = \psi(x_1, \ldots, x_{d-1}) - x_d$.

10.3.2 Vecteur normal unitaire sortant

Pour un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, la direction du vecteur $\nabla\rho(x)$ pour $x \in \partial\Omega$ ne dépend pas du choix de la fonction ρ pour définir Ω (voir [7], page 41). Cela conduit à la définition de vecteur normal unitaire sortant.

Définition 10.3.6. *Pour $x \in \partial\Omega$, le vecteur $\nabla\rho(x)$ s'appelle le vecteur normal sortant à Ω au point x. Le vecteur*

$$\nu(x) = \frac{\nabla\rho(x)}{||\nabla\rho(x)||}$$

s'appelle le vecteur normal unitaire sortant à Ω au point $x \in \partial\Omega$.

On peut définir une notion de dérivée normale extérieure à Ω en posant

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \left\langle \nu(x), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \nu_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exemple 10.3.7. *Supposons que $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$. Alors Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}$ en prenant $\rho(x) = x(x-1)$. On a, $\partial\Omega = \{0,1\}$, $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$.*

Exemple 10.3.8. *Pour $r > 0$, soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$. L'ouvert Ω est un ouvert régulier et $\partial\Omega = S(0,r)$, la sphère centrée en 0 de rayon r de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, pour $x \in S(0,r)$,*

$$\nu(x) = \left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_d}{r}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{d} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exemple 10.3.9. *Soit $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Posons*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

Alors Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $\rho((x_1, \dots, x_d)) = \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d$. De plus,

$$\partial\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d = \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}$$

et

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}} \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\psi(x') \\ \vdots \\ \partial_{x_{d-1}}\psi(x') \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$ et $\nabla'\psi$ désigne le gradient $d-1$ dimensionnel associé aux $d-1$ premières coordonnées de x, $(\partial_{x_1}\psi, \dots, \partial_{x_{d-1}}\psi) \in \mathbb{R}^{d-1}$. Par ailleurs, on a

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}} \left(\sum_{i=1}^{d-1} \partial_{x_i}\psi \partial_{x_i} - \partial_{x_d} \right).$$

10.3.3 Mesure de surface, exemples

Soit un ouvert régulier Ω dans $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathbb{1}_\Omega$ la fonction caractéristique de Ω. Commençons par déterminer dans quel ensemble se situe le support de la distribution $\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega$.

Proposition 10.3.10. *Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,* supp $(\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega) \subset \partial\Omega$.

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$B_\infty(x_0, \delta) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ \max_{1 \le i \le d} |x_i| < \delta \right\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que supp $\varphi \subset B_\infty(x_0, \delta)$. On a, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$,

$$< \partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega, \varphi >= - < \mathbb{1}_\Omega, \partial_{x_i}\varphi >= - \int_\Omega \partial_{x_i}\varphi \mathrm{d}x.$$

Si $x_0 \notin \Omega$, alors $B_\infty(x_0,\delta) \cap \Omega = \emptyset$ et l'intégrale précédente est nulle. Si $x_0 \in \Omega$, alors $B_\infty(x_0,\delta) \subset \Omega$ et par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} < \partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega, \varphi > &= -\int_{B_\infty(x_0,\delta)} \partial_{x_i}\varphi \mathrm{d}x \\ &= -\int \cdots \int \left(\int_{x_{0,i}-\delta}^{x_{0,i}+\delta} \partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}x' \\ &= -\int \cdots \int (0-0)\, \mathrm{d}x' = 0, \end{aligned}$$

puisque supp $\varphi \subset B_\infty(x_0,\delta)$. Dans les deux cas, $x_0 \notin$ supp $(\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega)$. D'où l'inclusion voulue par passage au complémentaire.

□

Cette propriété nous conduit à poser la définition suivante.

Définition 10.3.11. *On appelle mesure de surface sur $\partial\Omega$, la mesure de Radon positive* $\mathrm{d}\sigma$ *définie par*

$$\mathrm{d}\sigma = -\frac{\partial}{\partial \nu}\mathbb{1}_\Omega.$$

On a alors,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\mathrm{d}\sigma(x).$$

Remarque. Plus généralement, pour g sommable par rapport à $\mathrm{d}\sigma$ sur $\partial\Omega$, on définit $g\mathrm{d}\sigma$ la distribution de simple couche par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < g\mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\partial\Omega} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\sigma(x).$$

Exemple 10.3.12. *On reprend $\Omega =]0,1[$. Alors, comme $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$, on a*

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \mathrm{d}\sigma, \varphi > &= \left\langle -\frac{\partial}{\partial \nu}\mathbb{1}_{]0,1[}, \varphi \right\rangle \\ &= < \mathbb{1}_{]0,1[}, (\nu\varphi)' > \\ &= \int_0^1 (\nu\varphi)'(x)\mathrm{d}x \\ &= \nu(1)\varphi(1) - \nu(0)\varphi(0) = \varphi(1) + \varphi(0) =< \delta_1 + \delta_0, \varphi > . \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{d}\sigma = \delta_0 + \delta_1$. *C'est une somme de mesures de Dirac portées par $\{0\}$ et $\{1\}$.*

Exemple 10.3.13. *Soit $\Omega = B(0,r)$. On a, pour $x = (x_1, \dots x_d) \in S(0,r)$, $\nu(x) = (\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_d}{r})$. D'où, $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^d x_i\partial_{x_i}$. Or, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, en passant en coordonnées polaires, $x = t\theta$ avec $t \in [0,r[$ et $\theta \in S^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, alors,*

$$t\partial_t(\varphi(t\theta)) = \sum_{i=1}^d t\theta_i\partial_{x_i}\varphi(t\theta) = \sum_{i=1}^d x_i\partial_{x_i}\varphi(x).$$

Utilisons cette expression pour calculer $\mathrm{d}\sigma$. *On a, pour toute* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
< \mathrm{d}\sigma, \varphi > &= \left\langle -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^d x_i\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega, \varphi\right\rangle = \frac{1}{r}\left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(x_i\varphi)\right\rangle \\
&= \frac{1}{r}\left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^d (\varphi + x_i\partial_{x_i}\varphi)\right\rangle \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{|x|<r}\sum_{i=1}^d x_i\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_0^r\int_{S^{d-1}} t\partial_t(\varphi(t\theta))t^{d-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{S^{d-1}}\left(\int_0^r \partial_t(\varphi(t\theta))t^d\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{S^{d-1}}\left(\left[\varphi(t\theta)t^d\right]_0^r - \int_0^r \varphi(t\theta)\cdot dt^{d-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r}\varphi(x)\mathrm{d}x + r^{d-1}\int_{S^{d-1}}\varphi(r\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{d}{r}\int_0^r\int_{S^{d-1}}\varphi(t\theta)\cdot t^{d-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{S^{d-1}}\varphi(r\theta)r^{d-1}\mathrm{d}\theta. \qquad (10.1)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité définit la mesure de surface $\mathrm{d}\sigma$ *sur la boule de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$ *:*

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ < \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{S^{d-1}}\varphi(r\theta)r^{d-1}\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 10.3.14. *On reprend l'exemple de l'ouvert régulier*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

où $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^∞. *Soit* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Posons* $D(x') = \sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}$. *Alors,*

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d-1}\partial_{x_i}\left(\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_{x_d}\left(\frac{1}{D(x')}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x := I_1 - I_2.$$

On a

$$I_1 = \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_i}\left(\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x'$$

et

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_d}\left(\frac{1}{D(x')}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x' = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1}{D(x')}\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x'.$$

Or, pour $i \in \{1, \dots, d-1\}$ *et* $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\partial_{x_i}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\theta(x', x_d)\mathrm{d}x_d = \int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_i}\theta(x', x_d)\mathrm{d}x_d - (\partial_{x_i}\psi)\theta(x', \psi(x')).$$

On en déduit, en prenant $\theta : x \mapsto \frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)$,

$$I_1 = \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)^2\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x' + \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\partial_{x_i}\left(\int_{\psi(x')}^{+\infty}\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x_d\right)\mathrm{d}x'.$$

Comme φ est à support compact, elle est nulle pour $x_i = \pm\infty$, de sorte que le deuxième terme du membre de droite est nul. On en déduit :

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= I_1 - I_2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{D(x')}(1 + |\nabla\psi(x')|^2)\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x'.$$

Finalement, on obtient la formule qui donne la mesure de surface sur $\partial\Omega$:

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(x', \psi(x'))\sqrt{1 + |\nabla\psi(x')|^2}\mathrm{d}x'.$$

10.4 Formule de Stokes

10.4.1 Formule de Stokes

Nous commençons par préciser la proposition 10.3.10.

Proposition 10.4.1. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ et soit ν le champ de vecteur normal sortant à Ω (*i.e.*, l'application $x \mapsto \nu(x)$). Si $\mathrm{d}\sigma$ désigne la mesure de surface sur $\partial\Omega$, alors, pour tout $i \in \{1, \dots d\}$,*

$$\nu_i \mathrm{d}\sigma = -\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega.$$

Démonstration : Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction marche telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(x) = 1$ si $x \leq -1$ et $\chi(x) = 0$ pour $x \geq 0$. Soit aussi $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui définit l'ouvert régulier Ω. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \chi_\alpha(x) = \chi(\alpha\rho(x)).$$

Si $x \notin \Omega$, alors $\chi_\alpha(x) = 0$ puisque $\rho(x) \geq 0$. Si $x \in \Omega$, $\chi_\alpha(x) = 1$ pour α tel que $\alpha\rho(x) \leq -1$, ce qui est toujours possible, quitte à choisir α assez grand. De plus, puisque $\chi_\alpha \leq 1$, par le TCD,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\alpha(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} \int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Cela se traduit par le fait que la famille $(T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque α tend vers l'infini.

Par continuité des opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a aussi

$$\forall i \in \{1, \dots, d\},\ -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k}\chi_\alpha \xrightarrow[\alpha \to +\infty]{} -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k}\mathbb{1}_\Omega = \nu_i \left(-\frac{\partial}{\partial\nu}\mathbb{1}_\Omega\right) = \nu_i \mathrm{d}\sigma$$

avec convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont on suppose que le support contient un voisinage de $\partial\Omega$. On a

$$\begin{aligned}
\left\langle -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k}\chi_\alpha, \varphi \right\rangle &= \left\langle -\sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k}\chi_\alpha, \nu_i\varphi \right\rangle \\
&= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x)) \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}\rho(x)\nu_k(x)\nu_i(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^d \partial_{x_k}\rho(x)\nu_k(x) = ||\nabla\rho(x)||$, d'où

$$\begin{aligned}
\left\langle -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k}\chi_\alpha, \varphi \right\rangle &= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x))||\nabla\rho(x)||\nu_i(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x))\partial_{x_i}\rho(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_i}(\chi_\alpha(x))\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En faisant tendre α vers l'infini dans cette dernière égalité et en utilisant les résultats précédents, on obtient,

$$< \nu_i \mathrm{d}\sigma, \varphi >= - < \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, \varphi > .$$

En effet, $(T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donc $(\partial_{x_i} T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0} = (T_{\partial_{x_i}\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ (puisque χ_α est C^∞ donc C^1) converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On a donc bien montré que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\nu_i \mathrm{d}\sigma = -\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega$.

□

Avant d'énoncer le théorème de Stokes nous donnons une notation qui est justifiée par le résultat suivant que l'on ne démontre pas.

Proposition 10.4.2. *Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ borné et soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit f continue sur $\overline{\Omega}$. Alors, les deux propriétés sont équivalentes :*

1. *f est de classe C^k dans Ω et les dérivées de f jusqu'à l'ordre k se prolongent continûment à $\overline{\Omega}$.*
2. *Il existe une fonction appartenant à $C^k(\mathbb{R}^d)$ qui coïncide avec f sur $\overline{\Omega}$.*

On dit alors que f est de classe C^k jusqu'au bord de Ω et on note $f \in C^k(\overline{\Omega})$ si ces conditions sont vérifiées.

Pour $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un champ de vecteur dont les composantes $X_i \in C^1(\overline{\Omega})$, on rappelle la définition de la divergence :

$$\mathrm{div}\ X = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} X_i.$$

Théorème 10.4.3 (Formule de Stokes)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier et X un champ de vecteur défini sur $\overline{\Omega}$ et dont les composantes $X_i \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors,*

$$\int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \mathrm{div}\ X \, \mathrm{d}x,$$

où, en tout point de $x \in \partial\Omega$, $X(x) \cdot \nu(x)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ des deux vecteurs.

Démonstration : D'après la Proposition 10.4.1, on a

$$\begin{aligned} < \mathrm{d}\sigma, X \cdot \nu > &= \left\langle \mathrm{d}\sigma, \sum_{i=1}^{d} \nu_i X_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} < \nu_i \mathrm{d}\sigma, X_i > \\ &= -\sum_{i=1}^{d} < \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, X_i > \\ &= \left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} X_i \right\rangle \\ &= < \mathbb{1}_\Omega, \mathrm{div}\ X > . \end{aligned}$$

D'où la formule de Stokes.

□

10.4.2 Intégration par parties multidimensionnelle

Nous déduisons du théorème de Stokes un théorème d'intégration par parties multidimensionnelle.

Corollaire 10.4.4 (IPP). *Soient Ω un ouvert régulier et soit u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$. On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\int_\Omega v(x)\partial_{x_i}u(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)\mathrm{d}\sigma(x) - \int_\Omega u(x)\partial_{x_i}v(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule de Stokes au champ de vecteur $X : x \mapsto u(x)v(x)e_i$ où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

□

Exemple 10.4.5. *Appliquons cette formule à l'ouvert $\Omega =]0,1[$. La mesure de surface de $\partial\Omega$ est $\mathrm{d}\sigma = \delta_0 + \delta_1$. On a alors, pour u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$,*

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(x)u'(x)\mathrm{d}x &= < \delta_0 + \delta_1, u \cdot v \cdot \nu > - \int_0^1 v'(x)u(x)\mathrm{d}x \\ &= u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 v'(x)u(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

puisque $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$. On retrouve exactement la formule d'intégration par parties habituelle en dimension 1.

10.4.3 Formule de Green pour le laplacien

On peut aussi retrouver la formule de Green pour la Laplacien.

Corollaire 10.4.6. *Soient Ω un ouvert régulier et soient u et v dans $C^2(\overline{\Omega})$. On a,*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Démonstration : On applique la formule de Stokes au champ de vecteurs $u\nabla v$. On obtient :

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\nabla v \cdot \nu)\mathrm{d}\sigma.$$

Puis on retranche la formule symétrique en u et v pour avoir le résultat.

□

10.4.4 Formule des sauts multidimensionnelle

Soit Ω un ouvert régulier borné et soit Ω^c le complémentaire de $\overline{\Omega}$. Soit $\underline{u}$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$ telle que ses restricitions u et u^c à Ω et Ω^c se prolongent par continuité en des éléments de $C^1(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega^c})$. Pour $x \in \partial\Omega$, on notera $u_{\text{int}}(x)$ et $u_{\text{ext}}(x)$ les valeurs respectives de ces prolongements.

Théorème 10.4.7 (Formule des sauts). *Avec les notations ci-dessus, on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\partial_{x_i} T_{\underline{u}} = T_{\partial_{x_i} u} + T_{\partial_{x_i} u^c} + (u_{\text{ext}} - u_{\text{int}})(\nu(\cdot).e_i)\mathrm{d}\sigma$$

où $(u_{\text{ext}} - u_{\text{int}})\nu(\cdot).e_i\mathrm{d}\sigma$ est la mesure de Radon dont la densité par rapport à $\mathrm{d}\sigma$ est $x \mapsto (u_{\text{ext}}(x) - u_{\text{int}}(x))\nu(x).e_i$.

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. On applique la formule d'intégration par parties dans $\overline{\Omega}$ au produit de φ par le prolongement par continuité de u à $\overline{\Omega}$. On obtient

$$-\int_\Omega \underline{u}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x)\partial_{x_i}u(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\varphi(x)u_{\mathrm{int}}(x)\nu(x)\cdot e_i\mathrm{d}\sigma.$$

Puis, on applique la formule d'intégration par parties dans $\overline{\Omega^c}$ au produit de φ par le prolongement par continuité de u^c à $\overline{\Omega^c}$. On obtient

$$-\int_{\Omega^c} \underline{u}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega^c} \varphi(x)\partial_{x_i}u^c(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\varphi(x)u_{\mathrm{ext}}(x)(-\nu(x))\cdot e_i\mathrm{d}\sigma.$$

La somme des membres de gauche vaut par définition $< \partial_{x_i}T_{\underline{u}}, \varphi >$. La somme des premiers termes des membres de droite donne $< T_{\partial_{x_i}u} + T_{\partial_{x_i}u^c}, \varphi >$ et la somme des termes restant vaut :

$$\int_{\partial\Omega}\varphi(x)(u_{\mathrm{ext}}(x) - u_{\mathrm{int}}(x))\nu(x)\cdot e_i\mathrm{d}\sigma = \langle (u_{\mathrm{ext}} - u_{\mathrm{int}})\nu\cdot e_i\mathrm{d}\sigma, \varphi\rangle\,.$$

□

10.5 Applications

10.5.1 Les relations de Rankine-Hugoniot

On considère le système d'équations d'Euler conservatives, modélisant l'écoulement instationnaire d'un fluide de densité ponctuelle ρ, de vitesse u, de pression p et d'énergie e, qui sont des "fonctions" de $x \in \mathbb{R}$ et de t. Ainsi

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0. \end{cases} \tag{10.2}$$

On suppose que le fluide est traversé par un choc de vitesse σ, c'est-à-dire qu'il y a par exemple, discontinuité de la densité au travers de la courbe dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $x - \sigma t = 0$. On désignera par f^+ la limite de $f(x,t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t > 0$ et par f^- la limite de $f(x,t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t < 0$.
On veut trouver des relations entre les valeurs de ρ, u, e, p avant et après le choc, en fonction de σ. On intègre contre la fonction $1_{x\in[\sigma t-\varepsilon, \sigma t+\varepsilon]}$ l'équation $\partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0$. On obtient :

$$\int_{\sigma t-\varepsilon}^{\sigma t+\varepsilon}(\partial_t\rho + \partial_x(\rho u))dx = 0.$$

On note $\tilde{\rho}(X,t) = \rho(X+\sigma t, t)$, la densité liée au choc. On trouve

$$\partial_t\tilde{\rho} = \sigma\partial_x\rho(X+\sigma t,t) + \partial_t\rho(X+\sigma t,t).$$

On obtient alors

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\rho(X+\sigma t,t)dX + \sigma[\rho(\sigma t+\varepsilon,t) - \rho(\sigma t-\varepsilon,t)] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\tilde{\rho}(X+\sigma t,t)dX.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\partial_t\tilde{\rho}(X+\sigma t,t)dX - \sigma[\rho(\sigma t+\varepsilon,t) - \rho(\sigma t-\varepsilon,t)] + (\rho u)(\sigma t-\varepsilon,t) - (\rho u)(\sigma t-\varepsilon,t) = 0.$$

Nous faisons l'hypothèse que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_t \tilde{\rho}(X + \sigma t, t) dX$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. On en tire, appliquant ce même raisonnement pour toutes les équations

$$\begin{cases} \sigma(\rho^+ - \rho^-) = (\rho u)^+ - (\rho u)^- \\ \sigma((\rho u)^+ - (\rho u)^-) = (\rho u^2 + p)^+ - (\rho u^2 + p)^- \\ \sigma((\rho e)^+ - (\rho e)^-) = (\rho u e + p u)^+ - (\rho u e + p u)^- \end{cases} \tag{10.3}$$

Nous pouvons à présent donner une justification plus générale du résultat que l'on vient d'énoncer. On suppose que l'on étudie un système conservatif du type :

$$\partial_t U + \partial_x (F(U)) = 0.$$

On suppose que, dans l'espace (x, t), il existe une solution de classe C^1 pour $x - \sigma t < 0$ notée U_1 et une solution de classe C^1 pour $x - \sigma t > 0$ notée U_2. On peut alors poser :

$$V(x, t) = U_1(x, t) + (U_2(x, t) - U_1(x, t)) H(x - \sigma t).$$

Cette fonction coïncide avec U_1 pour $x < \sigma t$ et avec U_2 pour $x > \sigma t$. Ainsi, $\partial_t V + \partial_x (F(V))$ est nulle pour $x \neq \sigma t$. On vérifie alors par la formule des sauts que :

$$\partial_t V = \partial_t U_1 + (\partial_t U_2 - \partial_t U_1) H(x - \sigma t) - \sigma \delta_{x - \sigma t = 0} (U_2(\sigma t, t) - U_1(\sigma t, t)).$$

De même, par la formule des sauts appliquée à $F(V)$, on a :

$$\partial_x (F(V)) = \partial_x (F(U_1)) + (\partial_x (F(U_2)) - \partial_x (F(U_1))) H(x - \sigma t) + (F(U_2(\sigma t, t)) - F(U_1(\sigma t, t))) \delta_{x - \sigma t = 0}.$$

Il vient ainsi

$$\partial_t V + \partial_x (F(V)) = (F(U_2(\sigma t, t)) - F(U_1(\sigma t, t)) - \sigma (U_2(\sigma t, t) - U_1(\sigma t, t))) \delta_{x - \sigma t = 0}.$$

Si on veut que V soit une solution de l'équation convervative au sens des distributions, il faut que $F(U_2) - F(U_1) = \sigma(U_2 - U_1)$ sur la surface de discontinuité $x = \sigma t$.

10.5.2 Équation des ondes en dimension 3

On note $(t, \vec{r}) = (t, x, y, z)$ les coordonnées d'un point de l'espace-temps et $\Box = \partial_t^2 - \Delta_r$ le d'Alembertien.

On note Γ la surface du cône d'avenir définie par $t = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Bien que Γ ne soit pas une surface régulière à l'origine, on peut tout de même définir sa mesure de surface par

$$\int_\Gamma f \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^3} f(r, \vec{r}) \mathrm{d}\vec{r},$$

pour f définie sur Γ, continue et à support compact.

Enfin, si on note $\rho = \sqrt{t^2 + r^2}$, alors la distribution de simple couche $\frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}$ est une solution élémentaire de l'équation des ondes, $\Box u = f$. Il s'agit d'une mesure de Radon positive bien définie : en remarquant que, sur Γ, $\rho = r\sqrt{2}$, on a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4),\ \left\langle \frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(r, \vec{r})}{4\pi r} \mathrm{d}\vec{r}.$$

La fonction $1/r$ étant localement intégrable dans $\mathbb{R}^3$, l'intégrale de droite est finie et la forme linéaire est bien définie et positive.

Nous dirons qu'une distribution u sur $\mathbb{R}^4$ est nulle dans le passé s'il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ tel que le support de u soit inclus dans $[T_0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$. Alors, si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ est nulle dans le passé, il existe une et une seule solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ de $\Box u = f$ qui soit nulle dans le passé. Il s'agit de la distribution

$$u = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}\right) \star f.$$

Le support de u est contenu dans l'ensemble des $(t, \vec{r})$ tels qu'il existe $(t_0, \vec{r}_0) \in \operatorname{supp} f$ avec $t \geq t_0$ et $t - t_0 = ||\vec{r} - \vec{r}_0||$.

Chapitre 11

Espaces de Sobolev

11.1 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$

11.1.1 Définitions et premiers exemples

Nous allons commencer par définir les espaces de Sobolove d'indice $m \in \mathbb{N}$ avant de génraliser à des indices quelconques dans $\mathbb{R}$.

Définition 11.1.1. *L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est le sous espace de $L^2(\Omega)$ des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$.*

On peut alors munir cet espace d'un produit scalaire définit ainsi :

$$\forall u, v \in H^m(\Omega),\ (u|v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u | \partial^\alpha v)_{L^2}.$$

Ce produit scalaire induit la norme suivante sur $H^m(\Omega)$:

$$\forall u \in H^m(\Omega),\ ||u||_{H^m} = \left(sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 11.1.2. *L'espace $(H^m(\Omega), (\cdot|\cdot)_{H^m})$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : C'est un conséquence directe de la complétude de $L^2(\Omega)$.

□

On peut alors caractériser les espaces de Sobolev à l'aide de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Proposition 11.1.3. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors, $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Démonstration : On se donne $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'elle vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Or, si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi on a, pour tout α, $|\alpha| \leq m$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)\xi^\alpha|^2 < +\infty$$

car par la formule du binôme, il existe $C_m > 0$ telle que, pour tout $|\alpha| \leq m$,

$$\prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{2\alpha_j} \leq (1+|\xi|^2)^m \leq C_m \sum_{|\alpha|\leq m} \prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{2\alpha_j}.$$

On en déduit que $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, soit $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, soit encore $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$. La réciproque est alors immédiate avec les mêmes arguments.

□

Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$, on peut alors étendre les espaces de Sobolev à des indices non entiers pour pouvoir avoir une échelle continue d'espaces.

Définition 11.1.4. *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ défini par*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi < +\infty \right\}.$$

Notons ainsi que pour $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Ceci n'est plus vrai pour $s < 0$. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est muni du produit scalaire

$$\forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^d),\ (u|v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

Cela a bien un sens car on intègre le produit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de deux distributions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ égales respectivement à $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\hat{v}(\xi)}$.
On peut alors définir sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ la norme

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d),\ ||u||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Nous avons les premières propriétés suivantes.

Proposition 11.1.5.
1. *Si $s_1 \geq s_2$, alors $H^{s_1}(\mathbb{R}^d) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ et l'injection est continue.*
2. *$(H^s(\mathbb{R}^d), (\cdot|\cdot)_{H^s(\mathbb{R}^d)})$ est un espace de Hilbert.*
3. *Si $s = m \in \mathbb{N}$, $H^m(\mathbb{R}^d)$ comme défini à la définition 11.1.1 et $H^s(\mathbb{R}^d)$ coïncident algébriquement et topologiquement.*

Démonstration : Le premier point résulte de l'inégalité $(1+|\xi|^2)^{s_2} \leq (1+|\xi|^2)^{s_1}$. Pour le second point, soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une suite de Cauchy dans H^s. Alors $((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_j)_{j\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Elle converge donc vers $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Posons $u = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, par le théorème de Plancherel, $u \in H^s$ et

$$||u_j - u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_j - g||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

Le dernier point a été déjà été vu à la proposition 11.1.3.

□

Exemple 11.1.6. *On a $L^1(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$. En effet, si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulemenht si $s < \frac{d}{2}$.*

Exemple 11.1.7. *Puisque l'espace de Schwartz est invariant par transformée de Fourier, il est clair que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Exemple 11.1.8. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, la distribution δ_a est dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$. En effet, on remarque que $\hat{\delta}_a(\xi) = e^{-\mathrm{i}a\xi}$, ainsi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |e^{-\mathrm{i}a\xi}|^2(1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.$$

Cette intégrale est convergente pour $s < -\frac{d}{2}$, divergente si $s \geq -\frac{d}{2}$. De même, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mathcal{F}(\partial_{x_j}\delta_a), \phi\rangle = \langle \partial_{x_j}\delta_a, \hat{\phi}\rangle = -\langle \delta_a, \partial_{x_j}\hat{\phi}\rangle = \mathrm{i}\xi_j e^{-\mathrm{i}-a\xi}.$$

Ainsi on trouve $\partial_{x_j}\delta_a \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s < -\frac{d}{2} - 1$.

11.1.2 Densité des fonctions régulières

Théorème 11.1.9. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(v_j)_{j\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}$. Posons pour tout j, $u_j = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}v_j)$. Alors $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et par Plancherel,

$$||u_j - u||_s = ||v_j - (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

D'où le résultat voulu.

□

Corollaire 11.1.10. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Il suffit de raisonner par troncature et de montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $||\cdot||_s$. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau valant 1 si $|x| \leq 1$ et 0 pour $|x| \geq 2$. Posons $\theta_k(x) = \theta(\frac{x}{k})$ pour tout $k \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit s_0 un entier naturel tel que $s \leq s_0$. Posons pour tout $k \geq 1$, $u_k = \theta_k u$. Alors, $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$||u_k - u||_s^2 \leq ||u_k - u||_{s_0}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s_0} ||\partial^\alpha((\theta_k - 1)u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

d'après la proposition 11.1.3. Il suffit alors d'appliquer la formule de Leibniz et le théorème de convergence dominée pour montrer que ce majorant tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

□

11.1.3 Opérations sur $H^s(\mathbb{R}^d)$

A partir de l'exemple des dérivées du Dirac, on généralise au résultat suivant.

Proposition 11.1.11. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la distribution $\partial^\alpha u$ est dans $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$||\partial^\alpha u||_{s-|\alpha|} \leq ||u||_s.$$

Démonstration : Comme on a démontré que $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = (\mathrm{i})^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{u}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on en déduit, utilisant $|\xi^\alpha| \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$, que

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|}|\xi^\alpha\hat{u}|^2 \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

En effet, comme $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\hat{u}$ est une fonction de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

□

Le résultat suivant sur le produit par une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ permet de définir les espaces de Sobolev locaux $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Proposition 11.1.12. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$||\varphi u||_s \leq (2\pi)^{-d} 2^{\frac{|s|}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right) ||u||_s. \tag{11.1}$$

Ainsi, pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on dit que $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ si on a, pour tout $K \subset \Omega$, $\forall \varphi \in C^\infty_K(\mathbb{R}^d)$, $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Par densité, on va commencer par démontrer l'inégalité (11.1) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons défini le produit de convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et montré son lien avec la transformée de Fourier. On a alors $\varphi u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\varphi u}(\xi) = (2\pi)^{-d}(\hat{\varphi} \star \hat{u})(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{11.2}$$

Par ailleurs, montrons que l'on a l'inégalité :

$$\forall \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^d,\ \forall s \in \mathbb{R},\ (1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}(1+|\eta|^2)^s. \tag{11.3}$$

En effet, on a $|\xi| \leq |\xi-\eta| + |\eta|$, d'où par l'inégalité d'Archimède, $|\xi|^2 \leq 2(|\xi-\eta|^2 + |\eta|^2)$ et

$$(1+|\xi|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2+|\eta|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2).$$

Si $s \geq 0$, par croissance on obtient bien (11.3). Traitons le cas $s < 0$. On écrit alors $|\eta| \leq |\xi-\eta| + |\xi|$ et comme dans le premier cas on obtient $(1+|\eta|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\xi|^2)$ et puisque $s < 0$,

$$(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^{-s}(1+|\xi-\eta|^2)^{-s}(1+|\xi|^2)^{-s}$$

d'où encore (11.3) dans ce cas.

En utilisant (11.2) et (11.3), on obtient

$$||\varphi u||^2_s \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{4}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^{\frac{1}{2}} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{4}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^{\frac{1}{2}} (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\eta)|\mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intégrale en η pour obtenir

$$||\varphi u||^2_s \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi.$$

Par changement de variable dans la première intégrale, il vient

$$||\varphi u||^2_s \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)|\mathrm{d}\eta \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \right).$$

En utilisant le théorème de Fubini dans l'intégrale double on obtient

$$||\varphi u||^2_s \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)|\mathrm{d}\eta \right)^2 ||u||^2_s$$

ce qui prouve l'inégalité (11.1) pour φ et u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On suppose à présent $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers u dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ et donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En écrivant (11.1) pour $u_j - u_k$, on voit que $(\varphi u_j)_{j\geq 1}$ est de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ qui est complet, donc il existe $v \in H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi u_j \to v$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Or, $\varphi u_j \to \varphi u$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc par unicité de la limite, $\varphi u = v \in H^s(\mathbb{R}^d)$. On écrit alors (11.1) pour u_j et on passe à la limite. On obtient alors (11.1) pour $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

□

11.2 Théorème d'injection de Sobolev

Le fait d'être dans un espace de Sobolev signifie une certaine décroissance à l'infini de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée. Cela correspond à une certaine régularité pour la distribution et les espaces de Sobolev forme une échelle de régularité. Il se trouve que pour s suffisament grand, cette régularité correspond à l'échelle de régularité classique des fonctions de classe C^k.

Commençons par introduire, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'espace $C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}^d$ de limite nulle à l'infini ainsi que toute leurs dérivées, *i.e.*, $u \in C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $u \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k,\ \lim_{|x|\to+\infty} \partial^\alpha u(x) = 0.$$

On peut munir cet espace de la norme

$$|u|_k = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Théorème 11.2.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{d}{2} + k$. Alors l'espace $(H^s(\mathbb{R}^d), ||\cdot||_s)$ est inclus, avec injection continue, dans l'espace $(C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d), |\cdot|_k)$.*

Démonstration : Nous allons utiliser la fait que la transformée de Fourier evoie continûment l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $C^0_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$.

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2} + k$. Alors $\hat{u}$ est mesurable et, pour tout $|\alpha| \leq k$, $(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, on peut écrire, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi|^{|\alpha|}|\hat{u}(\xi)| = \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)|.$$

Comme $2s - 2k > d$, la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc le membre de droite dans l'inégalité précédente est le produit de deux fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il est donc dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et par intégration de l'inégalité, il existe $C > 0$, $||(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_s$.

Alors, $\partial^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}((-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}) \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$. Donc $u \in C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\forall |\alpha| \leq k,\ ||\partial^\alpha u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq ||(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_s.$$

□

Corollaire 11.2.2. *On a*

$$\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty_{\to 0}(\mathbb{R}^d).$$

Remarque. Il faut prendre garde au fait que ce corollaire ne signifie pas que l'intersection de tous les $H^s(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet,, pour $d = 1$ par exemple, la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, de transformée de Fourier $\xi \mapsto \mathrm{e}^{-|\xi|}$ est bien dans tous les $H^s(\mathbb{R})$, mais n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarque. Le théorème d'injection de Sobolev n'est pas vrai pour $s = \frac{d}{2} + k$, il faut une inégalité stricte. Par exemple, pour $k = 0$, l'espace $H^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

11.3 Théorème de trace dans $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$

Considérons l'hyperplan de $\mathbb{R}^{d+1}$, $\{(x', x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_{d+1} = 0\}$, où x' désigne les d premières coordonnées. Nous nous intéressons à l'opérateur trace γ qui à une fonction raisonnable $(x', x_{d+1}) \mapsto \varphi(x', x_{d+1})$ associe la fonction $\gamma\varphi : x' \mapsto \varphi(x', 0)$. Cet opérateur γ est bien défini pour des fonctions continues, mais il n'a pas de sens a priori pour des classes de fonctions localement intégrables, l'hyperplan étant de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{d+1}$. D'autre part, il existe des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ qui sont continues pour $x_{d+1} \neq 0$ et qui tendent vers $+\infty$ lorsque x_{d+1} tend vers 0, il paraît alors exclu de définir la trace d'une telle fonction.
Nous allons montrer que l'on peut définir γudès que $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Hormis en dimension 1 (et dans ce cas l'hyperplan considéré est réduit au singleton nul...), une telle condition n'implique pasla continuité de u. Nous allons donc construire γ par prolongement par continuité de l'opérateur trace usuel.

Théorème 11.3.1. *Si $s > \frac{1}{2}$, l'application*

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi & \mapsto & (x' \mapsto \varphi(x', 0)) \end{array}$$

se prolonge en une application continue γ de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. De plus, ce prolongement défini une application surjective.

Démonstration : Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}),\ ||\gamma\varphi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_s ||\varphi||_{H^s(\mathbb{R}^{d+1})}. \tag{11.4}$$

Pour cela, considérons $\psi(x') = \varphi(x', 0)$. Ainsi

$$\hat{\psi}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'} \varphi(x', 0)\mathrm{d}x'.$$

Notons $\tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_{d+1}\xi_{d+1}} \varphi(x', x_{d+1})\mathrm{d}x_{d+1}$ la transformée de Fourier partielle de φ par raport à x_{d+1}. Ainsi par inversion de Fourier

$$\varphi(x', x_{d+1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x_{d+1}\xi_{d+1}} \mathrm{d}\xi_{d+1}$$

et ainsi

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1})\mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi') &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'} \mathrm{d}x' \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x', \xi_{d+1})\mathrm{d}\xi_{d+1} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi' - \mathrm{i}x_{d+1}\xi_{d+1}} \varphi(x', x_{d+1})\mathrm{d}x'\mathrm{d}\xi_{d+1}\mathrm{d}\xi_{d+1} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_{d+1}) d\xi_{d+1}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{-\frac{s}{2}}|\right|^2.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^s \mathrm{d}\xi_{d+1}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{-s}\mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

Dans l'intégrale ne comportant pas φ, on effectue le changement de variable $\xi_{d+1} = (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}u$. Il reste

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^s \mathrm{d}\xi_{d+1}(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s}\int_{\mathbb{R}}(1+u^2)^{-s}\mathrm{d}u.$$

On remarque que la dernière intégrale converge bien par l'hypothèse $s > \frac{1}{2}$. On intègre alors en ξ' pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\psi}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi' \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^s}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}\xi'\int_{\mathbb{R}}|\hat{\varphi}(x',\xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^s\mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

On a alors l'inégalité (11.4) avec $C_s = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^s}$.
Cette inégalité implique que γ peut être prolongée par continuité de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Pour ce faire, on considère $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ convergeant vers u au sens de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$. La suite $\gamma\varphi_j$ est une suite de Cauchy dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, qui converge car l'espace est de Hilbert. La limite ne dépend pas de la suite φ_p choisie ; on la note γu et cela définit le prolongement par continuité de γ à $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$.
On remarque d'après nos calculs que l'on peut expliciter γ de la manière suivante :

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1}),\ \gamma u = \mathcal{F}_d^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_d u(\xi',\xi_{d+1})\mathrm{d}\xi'\right), \tag{11.5}$$

où on a mis en indice de la transformée de Fourier la dimension de l'espace concerné.

Il nous reste à démontrer la surjectivité de l'application γ que l'on vient de construire. Soit donc $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Notons $\xi' \mapsto g(\xi')$ la transformée de Fourier de v et définissons u, distribution sur $\mathbb{R}^{d+1}$, comme la transformée de Fourier inverser de la fonction f suivante,

$$\forall \xi = (\xi',\xi_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1},\ f(\xi) = k_N\frac{(1+|\xi'|^2)^N}{(1+|\xi|^2)^{N+\frac{1}{2}}}g(\xi').$$

On va choisir les constantes N et k_N de sorte que $\gamma u = v$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1})$. On veut donc montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(1+|\xi|^2)^s|f(\xi)|^2\mathrm{d}\xi < +\infty \tag{11.6}$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi',\xi_{d+1})\mathrm{d}\xi_{d+1} = g(\xi'). \tag{11.7}$$

Par définition de f, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}}(1+|\xi|^2)^s|f(\xi)|^2\mathrm{d}\xi \leq C\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi'|^2)^{2N}|g(\xi')|^2\mathrm{d}\xi'\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi|^2)^{s-2N-1}\mathrm{d}\xi_{d+1}. \tag{11.8}$$

La seconde intégrale est finie dès lors que l'on choisit $N > \frac{s}{2} - \frac{1}{4}$, et elle est égale, après changement de variable, à une constante foirs $(1 + |\xi'|^2)^{s-2N-\frac{1}{2}}$. Le membre de droite de (11.8) est donc égal à une constante fois $\int_{\mathbb{R}^d}(1 + |\xi'|^2)^{2N}|g(\xi')|^2 \mathrm{d}\xi'$ dont la finitude exprime précisément l'hypothèse $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons donc établit (11.6) sous la condition $N > \frac{s}{2} - \frac{1}{4}$.
D'après l'expression de f, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi', \xi_{d+1}) \mathrm{d}\xi_{d+1} = k_N (1 + |\xi'|^2)^N g(\xi') \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

L'intégrale de droite est égale à une constante $c_{N+\frac{1}{2}} := \int_{\mathbb{R}}(1+\lambda^2)^{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\lambda$ fois $1 + |\xi'|^2)^{-N}$. Il suffit donc de choisir $k_N = 2\pi(c_{N+\frac{1}{2}})^{-1}$ pour avoir (11.7). Cela démontre la surjectivité de γ.

□

11.4 Théorème de trace dans $H^m(\mathbb{R}^d_+)$

Dans toutes la suite, nous ne donnerons plus les démonstrations des résultats. Pour celles-ci, nous renvoyons à [7].

11.4.1 Les espaces $H^m(\mathbb{R}^d_+)$

Nous regardons à présent le cas particulier des espaces de Sobolev où $s = m \in \mathbb{N}$ et Ω est le demi-espace

$$\mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d > 0\}.$$

On note alors $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^d_+)$ l'espaces des fonctions $u : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{C}$ qui sonbt restrictions à $\mathbb{R}^d_+$ d'élements de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, *i.e.* il existe $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $u = v$ sur $\mathbb{R}^d_+$.

Proposition 11.4.1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^d_+)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^d_+)$ pour la norme H^m.*

On peut utiliser ce résultat de densité pour montrer que tout élément de $H^m(\mathbb{R}^d_+)$ se prolonge en un élément de $H^m(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 11.4.2. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un opérateur linéaire continu $P : H^m(\mathbb{R}^d_+) \to H^m(\mathbb{R}^d)$ tel que, pour tout $u \in H^m(\mathbb{R}^d_+)$, $Pu|_{\mathbb{R}^d_+} = u$.*

On généralise alors au cas du demi-espace le théorème d'injection de Sobolev.

Théorème 11.4.3. *Si $m > \frac{d}{2} + k$, alors $H^m(\mathbb{R}^d_+)$ s'injecte continûment dans $C^k(\overline{\mathbb{R}}^d_+)$. Ainsi,*

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\mathbb{R}^d_+) = C^\infty(\overline{\mathbb{R}}^d_+).$$

On peut enfin énoncer le théorème de trace dans le cas du demi-espace. Commençons par en donner un énoncé dans le cas où $m = 1$.

Théorème 11.4.4. *L'application*

$$\gamma : \begin{array}{ccc} C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^d_+) & \to & C^\infty(\mathbb{R}^{d-1}) \\ \varphi & \mapsto & (x' \mapsto \varphi(x', 0)) \end{array}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire, continue et surjective γ_0 de $H^1(\mathbb{R}^d_+)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.

Ce résultat repose sur le théorème de trace pour un hyperplan et sur le théorème de prolongement. Donnons un énoncé plus général dans le cas de $m \geq 1$.

Théorème 11.4.5. *Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application*

$$\gamma : \begin{array}{ccl} C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^d_+) & \to & (C^\infty(\mathbb{R}^{d-1}))^m \\ \varphi & \mapsto & (x' \mapsto (\varphi(x',0), \partial_{x_d} u(x',0), \ldots, \partial_{x_d}^{m-1} u(x',0))) \end{array}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire, continue et surjective $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1})$ de $H^m(\mathbb{R}^d_+)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$.

11.4.2 Caractérisation de $H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$

On définit l'espace $H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$ comme étant l'adhérence de $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}^d_+)$ pour la norme H^1. A l'aide du théorème de trace pour le demi-espace, nous pouvons à présent en donner une caractérisation plus naturelle.

Théorème 11.4.6. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$u \in H_0^1(\mathbb{R}^d_+)$.*
2. *$u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$ et $\gamma_0 u = 0$.*
3. *$u \in H^1(\mathbb{R}^d_+)$ et $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ où*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \tilde{u}(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} u(x) & \text{si} & x_d > 0 \\ 0 & \text{si} & x_d \geq 0 \end{array} \right. .$$

Ce résultat donne donc un sens à la notion de distribution dans H^1 qui "s'annule au bord" du demi-espace, même si bien entendu les valeurs aux bords ne sont pas définies.

11.4.3 Les espaces $H^m(\Omega)$

Tout ce que nous venons de raconter dans le cas du demi-espace se généralise au cas d'un ouvert régulier de classe C^∞ (ou au moins de classe C^m pour $H^m(\Omega)$). Rappelons qu'un tel ouvert est tel qu'il existe $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \rho(x) < 0\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \rho(x) = 0\} \quad \text{et } \nabla\rho(x) \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

L'idée est que localement, Ω est difféomorphe à $\mathbb{R}^d_+$ (faire un dessin avec l'espace tangent). Résumons les résultats obtenus dans ce cas.

Théorème 11.4.7.

1. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'espace $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ pour la norme H^m.*
2. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un opérateur linéaire continu $P : H^m(\Omega) \to H^m(\mathbb{R}^d)$ tel que, pour tout $u \in H^m(\Omega)$, $Pu|_\Omega = u$.*
3. *Si $m > \frac{d}{2} + k$, alors $H^m(\Omega)$ s'injecte continûment dans $C^k(\overline{\Omega})$. Ainsi,*

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} H^m(\Omega) = C^\infty(\overline{\Omega}).$$

4. *Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application*

$$\gamma : \begin{array}{ccl} C_0^\infty(\overline{\Omega}) & \to & (C^\infty(\partial\Omega))^m \\ \varphi & \mapsto & (\varphi|_{\partial\Omega}, \partial_\nu u|_{\partial\Omega}, \ldots, (\partial_\nu)^{m-1} u|_{\partial\Omega})) \end{array}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire, continue et surjective $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1})$ de $H^m(\Omega)$ dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

5. *$H_0^m(\Omega) = \{u \in H^m(\Omega) \mid \gamma u = 0\}$.*

Annexe A

Dérivation et intégration sous le crochet

Nous démontrons deux résultats utiles qui sont les analogues dans la théorie des distributions des théorèmes classiques de dérivation et d'intégration sous le signe intégral.

Proposition A.0.1 (Dérivation sous le crochet)**.** *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^q$,* supp $\phi(x,\cdot) \subset \Omega$*. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^q$, $u(x) =< T, \phi(x,\cdot) >$. Alors, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ et on a*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^q,\ \forall x \in \mathbb{R}^q,\ \partial^\alpha u(x) =< T, \partial_x^\alpha \phi(x,\cdot) > .$$

Démonstration : Soient $x_0 \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \mathbb{R}^d$. Pour $h \in \mathbb{R}^q$, la formule de Taylor à l'ordre 1 nous donne :

$$\phi(x_0+h,y) = \phi(x_0,y) + \sum_{j=1}^{q} \partial_{x_j}\phi(x_0,y)h_j + R(x_0,y,h),$$

avec

$$R(x_0,y,h) = 2\sum_{|\alpha|\le 2} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_x^\alpha \phi(x_0+th,y)\mathrm{d}t.$$

Comme $y \mapsto R(x_0,y,h)$ est de classe C^∞ à support dans supp $\phi(x_0,\cdot)$ et puisque T est une distribution sur Ω, il existe $C>0$ et $m \in \mathbb{N}$ indépendants de x_0 et h tels que

$$| < T, R(x_0,y,h) > | \le C \sum_{|\beta|\le m} ||\partial_x^\beta R(x_0,\cdot,h)||_\infty.$$

Or, pour $|h| \le 1$,

$$\begin{aligned} |\partial_y^\beta R(x_0,y,h)| &\le 2\sum_{|\alpha|\le 2}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_y^\beta\partial_x^\alpha\phi(x_0+th,y)\mathrm{d}t \\ &\le C|h|^2 \sum_{|\alpha|\le 2} \sup_{(x,y)\in \overline{B(0,1)}\times \mathrm{supp}\ \phi(x_0,\cdot)} |\partial_y^\beta \partial_x^\alpha \phi(x,y)|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$| < T, R(x_0,y,h) > | = \mathcal{O}(|h|^2)$$

et finalement

$$u(x_0+h) = u(x_0) + \sum_{j=1}^{q} < T, \partial_{x_j}\phi(x_0,y) > h_j + \mathcal{O}(|h|^2).$$

Cela prouve que u est différentiable par rapport à x et que l'on a

$$\partial_{x_i} u(x) =< T, \partial_{x_i} \phi(x,y) > .$$

Comme cela est valable pour tout i, on en déduit de plus que u est de classe C^1. On obtient ensuite le résultat pour α quelconque par récurrence.

□

Proposition A.0.2 (Intégration sous le crochet). *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^q$,* supp $\phi(x,\cdot) \subset \Omega$. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^q$, $u(x) =< T, \phi(x,\cdot) >$. Alors, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^q} u(x)\mathrm{d}x = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^q} \phi(x,\cdot)\mathrm{d}x \right\rangle.$$

Démonstration : On commence par démontrer la proposition dans le cas où $q = 1$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$. On choisit $A > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ de sorte que supp $\phi \subset [-A, A] \times K$. Soit alors $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\psi(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t.$$

Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$ et, pour tout x fixé, le support de $y \mapsto \psi(x,y)$ est inclus dans K. Alors, par la proposition A.0.1, la fonction

$$u : \ x \mapsto < T, \psi(x,y) >= \left\langle T, \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t \right\rangle$$

est de classe C^∞ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ u'(x) =< T, \partial_x \psi(x,y) >=< T, \phi(x,y) > .$$

En intégrant cette dernière relation, on obtient :

$$\left\langle T, \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t \right\rangle = u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} < T, \phi(t,y) > \mathrm{d}t.$$

En prenant $x = A$ par exemple, on obtient alors la proposition dans le cas $q = 1$.

Pour $q > 1$ on procède par intégrations successives. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q \times \Omega)$. Soit $A > 0$ tel que supp $\phi \subset [-A, A]^q \times K$ pour un compact $K \subset \Omega$. On définit alors $\psi_q : \mathbb{R}^q \times \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (x', x_q, y) \in \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R} \times \Omega, \ \psi_q(x', x_q, y) = \int_{-\infty}^{x_q} \phi(x', t, y)\mathrm{d}t.$$

Par le résultat pour $q = 1$, on a

$$\left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \phi(x', t, y)\mathrm{d}t \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} < T, \phi(x', t, y) > \mathrm{d}t.$$

Puis, on définit $\psi_{q-1} : \mathbb{R}^{q-1} \times \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (x', x_{q-1}, y) \in \mathbb{R}^{q-2} \times \mathbb{R} \times \Omega, \ \psi_{q-1}(x', x_q, y) = \int_{-\infty}^{x_{q-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x', t_1, t_2, y)\mathrm{d}t_1 \right) \mathrm{d}t_2.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} < T, \psi_{q-1}(x', x_{q-1}, y) > &= \int_{-\infty}^{x_{q-1}} < T, \int_{\mathbb{R}} \phi(x', t, t_1, y) \mathrm{d}t_1 > \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{x_{q-1}} \int_{\mathbb{R}} < T, \phi(x', t, t_1, y) \mathrm{d}t_1 > \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

La fin de la démonstration se fait alors par récurrence.

□