Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS / M1 de Mathématiques
Année universitaire 2017-2018

Examen de Distributions

Le 8 décembre 2017

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.
Il est rappelé qu'il est autorisé d'admettre le résultat d'une question afin de pouvoir l'utiliser plus tard si nécessaire. Les questions indiquées par le signe (*) sont supposées plus difficiles.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. (a) Justifier que la fonction $f \;:\; x \mapsto |x|$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note T_f la distribution associée à f.
   (b) Calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Pour $n \geq 1$, on considère la distribution $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par
$$T_n = n^2\left(\delta_{\frac{1}{n}} + \delta_{-\frac{1}{n}} - 2\delta_0\right)$$
   où pour tout a réel, δ_a désigne la distribution de Dirac en a.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.
3. Soit H la distribution de Heaviside, associée à la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, +\infty[$. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle d'inconnue T, $T' + T = H$.
4. (a) Justifier que la distribution associée à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$, est tempérée.
   (b) Déterminer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la distribution associée à la fonction $x \mapsto \cos(x)$.
5. (a) Soit $C \in \mathbb{C}$. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue T, $xT = C$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle : $xT' + T = 0$.

Exercice 2. (Compétences attendues). Nous admettrons l'existence et la valeur de la limite suivante :
$$\forall M > 0,\; \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{i\pi\varepsilon}} \int_0^M \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}} \mathrm{d}x = 1.$$
Cette limite peut s'obtenir par la formule des résidus appliquée sur un contour bien choisi dans le plan complexe.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit T_ε la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{i\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}}$.
   (a) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de ψ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
   (b) Soit $M > 0$ tel que supp $\varphi \subset [-M, M]$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$< T_\varepsilon, \varphi >= \varphi(0)\frac{1}{2\sqrt{i\pi\varepsilon}} \int_{-M}^M \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}} \mathrm{d}x + \frac{1}{2\sqrt{i\pi\varepsilon}} \int_{-M}^M x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}} \psi(x)\mathrm{d}x.$$
   (c) En déduire que la famille $(T_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution de Dirac en 0.
   Indication : On pensera à effectuer une intégration par parties pour traiter le deuxième terme de la formule précedente.

2. Soit H la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,+\infty[$. Soit $g \ : \ (x,t) \mapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4i\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4it}}$.

   (a) Montrer que g est localement intégrable dans $\mathbb{R}^2$.

   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \ \partial_t g(x,t) = i\partial^2_{xx} g(x,t)$.

3. (*) Soit P l'opérateur de Schrödinger, $P = \partial_t - i\partial^2_{xx}$. Soit E la distribution associée à la fonction g. Calculer PE au sens des distributions.

Exercice 3. (Compétences attendues). On rappelle que, pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a f$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \tau_a f(x) = f(x-a)$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On note $\tau_a T$ la forme linéaire définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \ < \tau_a T, \varphi >=< T, \tau_{-a}\varphi > .$$

1. Montrer que $\tau_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Lorsque $T = T_f$ pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ donnée, que vaut $\tau_a T$?

   On dira que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est a-périodique lorsque $\tau_a T = T$.

   On considère à présent $P = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j$, où δ_j désigne la distribution de Dirac au point $j \in \mathbb{Z}$. Alors $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on l'appelle le peigne de Dirac.

3. Montrer que P est une distribution périodique de période 1.

4. Soit $E = \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\mathbf{1}_{[j,j+1[}$. Montrer que E est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la distribution associée à E est tempérée.

5. Montrer que $P = E'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En déduire que P est une distribution tempérée.

   Dans toute la suite, on prendra la normalisation suivante pour la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

6. Montrer que la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de P, notée $\hat{P}$, est une distribution périodique de période 1.

7. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{e}^{2i\pi x}$. Montrer que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ \langle u\hat{P}, \varphi\rangle = \langle \hat{P}, \varphi\rangle.$$

8. (*) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution telle que $(u-1)T = 0$. Montrer qu'il existe une famille de nombres complexes $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ telle que $T = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\delta_j$.

9. (*) Déduire des questions précédentes l'existence d'un nombre complexe a tel que

$$\hat{P} = a\sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j.$$

10. En appliquant $\hat{P}$ à la fonction $\phi \ : \ x \mapsto \mathrm{e}^{-\pi x^2}$, montrer que $a = 1$. En déduire que $\hat{P} = P$. *Indication : on pourra utiliser que* $\hat{\phi} = \phi$.

11. En déduire la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(j).$$