Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS / M1 de Mathématiques
Année universitaire 2017-2018

Examen de Distributions

Le 12 janvier 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Le sujet comporte trois pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.
Il est rappelé qu'il est autorisé d'admettre le résultat d'une question afin de pouvoir l'utiliser plus tard si nécessaire. Les questions indiquées par le signe (*) sont supposées plus difficiles.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

   (a) Justifier que la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note T_f la distribution associée à f.

   (b) Calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Pour $n \geq 0$, on considère la distribution la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ n\sin(nx) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

   (a) Justifier que, pour tout $n \geq 0$, la fonction f_n est localement intégrable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à f_n. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.
   Indication : on pourra effectuer deux intégrations par parties successives.

3. Soit

$$T : \begin{array}{ccc} C_0^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x. \end{array}$$

   (a) Montrer que T ainsi définie est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que le support de T est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

   (c) Montrer que le support de T contient $\mathbb{R}_+^*$. En déduire le support de T.

4. (a) Justifier que la distribution associée à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x\sin(x)$, est tempérée.

   (b) Déterminer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la distribution associée à la fonction $x \mapsto x\sin(x)$.

5. (a) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $T' + T = 0$.

   (b) Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $T' + T = \delta_0$.

   (c) En déduire l'ensemble des solutions tempérées de l'équation différentielle $T' + T = \delta_0$.

Exercice 2. (Compétences attendues). Soit ω un nombre réel strictement positif. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E) \qquad xT'' + (1 - \omega^2 x)T = 0.$$

On désigne par Δ_ω l'espace vectoriel des solutions (E) qui sont des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $T \in \Delta_\omega$, sa transformée de Fourier $\hat{T}$ vérifie l'équation différentielle

$$(\hat{E}) \qquad (\xi^2+\omega^2)\hat{T}' + (2\xi + \mathrm{i})\hat{T} = 0.$$

2. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\hat{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions associées aux fonctions

$$\xi \mapsto \frac{C}{\xi^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-\frac{i}{\omega}\arctan\frac{\xi}{\omega}}, \qquad C \in \mathbb{C}.$$

3. Justifier que toutes ces solutions sont tempérées.

4. En déduire la dimension de Δ_ω.

   Dans toute la suite, T désigne un élément de Δ_ω.

5. Montrer que $T = T_f$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $S = xT$. Montrer, en utilisant $(\hat{E})$, que l'on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\hat{S} = \frac{1-2i\xi}{\xi^2+\omega^2}\hat{T}.$$

7. En déduire que la fonction à laquelle est associée S, $x \mapsto xf(x)$, est dans $L^2(\mathbb{R})$, puis en déduire que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

8. (*) On suppose f non identiquement nulle. Posons

$$q(\omega) = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

   Montrer que $q(\omega) = \frac{4}{\omega}$.

   Indication : on pourra utiliser la formule de Plancherel et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3. (Compétences attendues). On considère l'opérateur différentiel de la chaleur :

$$P \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) & \to & \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \\ T & \mapsto & \partial_t T - \partial^2_{xx} T. \end{array}$$

1. Déterminer une distribution $A \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\ \forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\ (PT = F) \ \Leftrightarrow\ (A \star T = F).$$

   On rappelle sans démonstration qu'une solution élémentaire (ou fondamentale) de P est donnée par la distribution associée à la fonction E définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

2. Que vaut PE dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$?

3. On suppose que $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est une distribution associée à une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire d'une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation $PT = F$?

4. On considère la fonction $\tilde{E}$ définie par : $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ \tilde{E}(t,x) = E(t,x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Déterminer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, la distribution $T_{\tilde{E}} \star \delta_{(0,j)}$ pour tous $j \in \mathbb{Z}$.

5. Caractériser la distribution $T_{\tilde{E}} \star \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{(0,j)}\right)$.

Exercice 4. (Compétences avancées). Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on introduit le nombre complexe de partie réelle strictement positive ξ_0 tel que $\xi_0^2 = (1+\frac{i}{2})^2 - \xi^2$ et la fonction $g(\xi) = \xi_0^{-1}$. On introduit aussi la fonction $u \ : \ x \mapsto (1-|x|)1_{[-1,1]}(x)$. On démontrera que $\frac{1+\xi^2}{\xi_0^2}$ est bornée par une constante C lorsque ξ décrit $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$ et calculer $\hat{u}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Démontrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi_0^{-1} e^{ix.\xi} d\xi$ n'est pas bien définie dans $L^1(\mathbb{R})$ mais qu'on peut lui donner un sens. On appelle v la fonction ainsi définie.

3. Déterminer $s_0 > 1$ tel que, pour tout $s < s_0$, $u \in H^s(\mathbb{R})$.

4. Démontrer que $v \in H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s < \frac{1}{2}$.

5. Démontrer que la fonction donnée par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$w(x) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\hat{u}(\xi)}{\xi_0} e^{ix.\xi} d\xi$$
est une fonction de H^s pour tout $s < \frac{5}{2}$. Déterminer p de sorte que $w \in C^p(\mathbb{R})$.

6. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On introduit la fonction $K(\phi) = \phi \star v$. Démontrer l'égalité
$$\forall x \in \mathbb{R},\ ((K(\phi))'' + (1+\tfrac{i}{2})^2\phi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ix.\xi}\xi_0\hat{\phi}(\xi)d\xi.$$

7. (*) Déduire de la question précédente que l'opérateur $\phi \to (K(\phi))''$ s'étend à un opérateur de $L^2(\mathbb{R})$ dans $H^{-1}(\mathbb{R})$.
   Peut on résoudre, pour toute distribution S dans $H^{-1}(\mathbb{R})$, l'équation $U'' + (1+\frac{i}{2})^2 U = S$?