Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS / M1 de Mathématiques
Année universitaire 2017-2018

Examen de Distributions

Le 6 mars 2018

Durée de l'épreuve : 2 heures.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits, à l'exception d'une feuille au format A4 manuscrite.

Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $d \geq 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Donner la définition d'une distribution d'ordre au plus m sur Ω.

2. Soit $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 3 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$
   (a) Justifier que la fonction f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On note T_f la distribution associée à f.
   (b) Calculer la dérivée de T_f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Pour $n \geq 1$, on considère la distribution $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ définie par
$$T_n = n^2 \left(\delta_{\frac{1}{n^2}} - \delta_{-\frac{1}{n^2}} \right)$$
   où pour tout réel a, δ_a désigne la distribution de Dirac en a.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.

4. Soit
$$T \ : \ \begin{array}{ccc} C_0^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x. \end{array}$$
   (a) Montrer que T ainsi définie est une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que le support de T contient $\mathbb{R}^*$.
   (c) En déduire le support de T.

5. (a) Justifier que la distribution associée à la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$, est tempérée.
   (b) Déterminer la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la distribution associée à la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

6. On considère l'équation différentielle
$$(E) : \quad T'' = \delta_0, \quad \text{pour} \ \ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$
   (a) Résoudre (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (b) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Justifier que pour toute solution T de l'équation différentielle $T'' = f$, il existe une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que T soit la distribution associée à u.

Exercice 2. (Compétences attendues). Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x).$$

2. En déduire l'existence de la limite :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \mathrm{d}x - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} \right) :=< \mathrm{Pf}\left(\tfrac{1}{x^2}\right), \varphi > .$$

3. Justifier que la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right) : \varphi \mapsto < \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi >$ est une distribution d'ordre au plus 2 sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \left\langle \mathrm{vp}\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

   Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\left(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 3. (Compétences attendues). On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad U'' + 2U' - U = \delta_0.$$

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution U dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ que l'on déterminera. On calculera pour cela sa transformée de Fourier.
2. Démontrer que U appartient à $H^s(\mathbb{R})$ pour tout $s < \frac{3}{2}$.
3. Déterminer toutes les solutions de (E) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
4. En exprimant de manière simple la restriction de U à $\mathbb{R}_-^*$ et à $\mathbb{R}_+^*$, calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{1+\xi^2-2i\xi}$ sans utiliser d'intégrale.