

Devoir Maison - Correction

① Problème 1:

1. Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$,
 $p_{\alpha, \beta}(\tau_a \varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha (\tau_a \varphi)^{(\beta)}(x)|$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x+a)|$$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}} |(y-a)^\alpha \varphi^{(\beta)}(y)|$$

binôme de
Newton

$$\leq C_\alpha \max_{\gamma \leq \alpha} \sup_{y \in \mathbb{R}} |y^\gamma \varphi^{(\beta)}(y)|$$

$$= C_\alpha \max_{\gamma \leq \alpha} p_{\gamma, \beta}(\varphi)$$

Donc, puisque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\tau_a T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On a:

$$\langle \tau_a T_f, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_a \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x+a) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y-a) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \tau_a f(y) \varphi(y) dy$$

$$= \langle T_{\tau_a f}, \varphi \rangle$$

$$\text{Donc } \tau_a T_f = T_{\tau_a f}.$$

3. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a:

$$\textcircled{2} \quad \langle \tau_1 P, \varphi \rangle = \langle P, \tau_{-1} \varphi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(j+1) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(j) = \langle P, \varphi \rangle$$

Donc $\tau_1 P = P$ et P est 1-périodique.

4. Tout d'abord, E est bornée sur tout compact donc localement intégrable. Mieux, si $x \in \mathbb{R}$, il existe $j \in \mathbb{Z}$, $x \in [j, j+1[$ d'où $E(x) = j$ et ainsi: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|E(x)| \leq 1 + |x|$.

Donc E est à croissance polynomiale, on peut donc lui associer une distribution tempérée par:

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \langle E, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} E(x) \varphi(x) dx.$$

5. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a:

$$\langle E', \varphi \rangle = -\langle E, \varphi' \rangle = - \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[j, j+1[}(x) \varphi'(x) dx$$

$$= - \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \int_j^{j+1} \varphi'(x) dx = - \sum_{j \in \mathbb{Z}} j (\varphi(j+1) - \varphi(j))$$

$$= - \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j-1) \varphi(j) - j \varphi(j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(j) = \langle P, \varphi \rangle.$$

Donc $E' = P$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Or $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donc

$E' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donc $P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On retrouve le résultat admis dans la définition de P .

③ 6. Soit $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$. Alors:

$$\langle \mathcal{U}_1 \hat{P}, \varphi \rangle = \langle \hat{P}, \mathcal{U}_1 \varphi \rangle = \langle P, \widehat{\mathcal{U}_1 \varphi} \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{U}_1 \varphi}(j)$$

$$\text{On: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathcal{U}_1 \varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi \xi x} \varphi(x-1) dx$$

$$\begin{matrix} y=x-1 \\ \downarrow \end{matrix} = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi \xi} e^{-2i\pi \xi y} \varphi(y) dy$$

$$\text{En particulier, pour } j \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\mathcal{U}_1 \varphi}(j) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-2i\pi j}}_{=1} e^{-2i\pi j y} \varphi(y) dy$$

$$\text{D'où: } \langle \mathcal{U}_1 \hat{P}, \varphi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(j) = \langle P, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{P}, \varphi \rangle.$$

Donc $\mathcal{U}_1 \hat{P} = \hat{P}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\hat{P}$ est 1-périodique.

7. On a: $\forall \varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$,

$$\langle u \hat{P}, \varphi \rangle = \langle \hat{P}, u \varphi \rangle = \langle P, \widehat{u \varphi} \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{u \varphi}(j)$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi j x} e^{2i\pi x} \varphi(x) dx$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi (j-1) x} \varphi(x) dx$$

$$= \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi j' x} \varphi(x) dx = \sum_{j' \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(j') = \langle P, \hat{\varphi} \rangle$$

$$\text{Donc } \langle u \hat{P}, \varphi \rangle = \langle P, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{P}, \varphi \rangle$$

④

8. Question plus difficile. A reprendre après le cours de Distributions dans $\mathcal{D}'$.

• Soit $j \in \mathbb{Z}$. Par Taylor avec reste intégral:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x)-1 = u(x)-u(j) = (x-j)N_j(x)$$

avec $N_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $N_j(j) \neq 0$ et $N_j(x) \neq 0$ sur $]j-1, j+1[$.

• Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset]j-1, j+1[$. Alors:

$$0 = \langle (u-1)T, \varphi \rangle = \langle T, (u-1)\varphi \rangle = \langle T, (x-j)N_j \varphi \rangle$$

$$= \langle (x-j)T, N_j \varphi \rangle.$$

$$\text{Or } C_0^\infty[j-1, j+1[\rightarrow \mathcal{S}'([j-1, j+1[) \text{ est une bijection}$$

$$\varphi \mapsto N_j \varphi$$

car N_j ne s'annule pas sur $]j-1, j+1[$. D'où: $(x-j)T=0$.

Alors il existe $a_j \in \mathbb{C}$, $T = a_j \delta_j$.

• On considère le recouvrement par des ouverts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}}]-\frac{3}{4}+j, j+\frac{3}{4}[$$

et $(\chi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement. Alors, si $\varphi \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$, $\chi_j \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\text{et } \text{supp}(\chi_j \varphi) \subset]-\frac{3}{4}+j, j+\frac{3}{4}[.$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \quad \text{D'où: } \langle T, \varphi \rangle &= \langle T, (\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j) \varphi \rangle \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle T, a_j \varphi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \varphi(j) \\
 &= a_j \varphi(j) \varphi(j) \text{ par le résultat plus haut} \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \delta_j, \varphi.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \exists (a_j)_{j \in \mathbb{Z}}, T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \delta_j.$$

$$\textcircled{9} \quad \text{Par la question 7, } (u-1)\hat{P} = 0. \text{ Donc il existe } (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \hat{P} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \delta_j.$$

$$\text{Soit alors } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{ supp } \varphi \subset]j-1, j+1[\text{ et } \varphi(j) \neq 0. \text{ Alors: } \langle \hat{P}, \varphi \rangle = a_j \varphi(j). \text{ Or } \hat{P} \text{ est}$$

1-périodique donc:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{P}, \varphi \rangle &= \langle \tau_1 \hat{P}, \varphi \rangle = \langle \hat{P}, \tau_{-1} \varphi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \varphi(j+1) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-1} \varphi(j) = a_{j-1} \varphi(j)
 \end{aligned}$$

on $\text{supp } \varphi \subset]j-1, j+1[$.

$$\text{Donc: } \forall j \in \mathbb{Z}, a_j \varphi(j) = a_{j-1} \varphi(j) \text{ et puisque } \varphi(j) \neq 0,$$

$$\textcircled{6} \quad \forall j \in \mathbb{Z}, a_j = a_{j-1}. \text{ Donc } (a_j)_{j \in \mathbb{Z}} \text{ est une suite constante et: } \exists a \in \mathbb{C}, \hat{P} = a \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j.$$

$$\textcircled{10} \quad \text{On a: } \hat{P} = aP. \text{ D'où, pour } \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

$$\langle \hat{P}, \phi \rangle = \langle aP, \phi \rangle = a \langle P, \phi \rangle$$

$$\neq \langle \hat{P}, \phi \rangle = \langle P, \hat{\phi} \rangle = \langle P, \phi \rangle \text{ car } \hat{\phi} = \phi.$$

$$\text{Donc: } a \langle P, \phi \rangle = \langle P, \phi \rangle \neq 0 \text{ car } \langle P, \phi \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-\pi j^2} > 0$$

$$\text{Donc } a = 1 \text{ et } \hat{P} = P.$$

$$\textcircled{11} \quad \text{Ainsi: } \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

$$\langle \hat{P}, \varphi \rangle = \langle P, \varphi \rangle \Leftrightarrow \langle P, \hat{\varphi} \rangle = \langle P, \varphi \rangle$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi(j)$$

D'où la formule de Poisson.

7

Problème 2:

1. Supposons $T \in \Delta_\omega$. En particulier $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et

$$\mathcal{F}(\alpha T'' + (1 - \omega^2 \alpha)T) = 0 \Leftrightarrow i\partial_\xi \mathcal{F}(T'') + \mathcal{F}(T) - \omega^2 i\partial_\xi \mathcal{F}(T) = 0$$

$$\Leftrightarrow i\partial_\xi (\xi^2 \hat{T}) + i\hat{T} + \omega^2 \hat{T}' = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\xi \hat{T} + \xi^2 \hat{T}' + i\hat{T} + \omega^2 \hat{T}' = 0$$

$$\Leftrightarrow (\xi^2 + \omega^2) \hat{T}' + (2\xi + i)\hat{T} = 0 \quad (\hat{E})$$

2. On a: $(\hat{E}) \Leftrightarrow \hat{T}' + \frac{2\xi + i}{\xi^2 + \omega^2} \hat{T} = 0.$

Donc les solutions classiques de $(\hat{E})$ sont de la forme:

$$\begin{aligned} \exists C \in \mathbb{C}, \forall \xi \in \mathbb{R}, u(\xi) &= C e^{-\int \frac{2\xi + i}{\xi^2 + \omega^2} d\xi} \\ &= C e^{-\int \frac{2\xi}{\xi^2 + \omega^2} d\xi - \int \frac{i}{\xi^2 + \omega^2} d\xi} \\ &= C e^{-\ln|\xi^2 + \omega^2| - \frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)} \\ &= \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-\frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)}. \end{aligned}$$

Puis, si $\hat{T}$ est solution de $(\hat{E})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on la cherche sous la forme: $\hat{T} = \frac{1}{\xi^2 + \omega^2} e^{-\frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)} S, S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

8) Alors, $\hat{T}' + \frac{2\xi + i}{\xi^2 + \omega^2} \hat{T} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2 + \omega^2} e^{-\frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)} S' = 0$

$$\Leftrightarrow S' = 0 \Leftrightarrow S = \text{cte.}$$

Donc l'ensemble des solutions de $(\hat{E})$ est:

$$\left\{ T_\xi \mapsto \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-\frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)} \mid C \in \mathbb{C} \right\}$$

3. A posteriori, on justifie que ces solutions sont bien dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En effet: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \left| \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-\frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)} \right| \leq \frac{C}{\omega^2}$
donc ces fonctions étant bornées, elles définissent des distributions tempérées.

4. On constate que Δ_ω est une droite vectorielle.

$$\dim \Delta_\omega = 1.$$

5. Tout d'abord, si $T \in \Delta_\omega$, alors il existe $C \in \mathbb{C}$ telle que: $\hat{T} = T_\xi \mapsto \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-\frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)}$

$$\text{On: } \left| \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-\frac{i}{\omega} \arctan\left(\frac{\xi}{\omega}\right)} \right|^2 = \frac{|C|^2}{(\xi^2 + \omega^2)^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

(9) Donc $\xi \mapsto \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-i\omega \arctan(\frac{\xi}{\omega})} \in L^2(\mathbb{R})$ et par Plancherel, T est aussi associée à une fonction de $L^2(\mathbb{R})$: $\exists f \in L^2(\mathbb{R}), T = T_f$.

De même, $\xi \mapsto \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-i\omega \arctan(\frac{\xi}{\omega})} \in L^1(\mathbb{R})$ et comme la transformée de Fourier d'une fonction L^1 est une fonction continue, par transformée de Fourier inverse, T est associée à une fonction continue g .

Alors : $T = T_f = T_g$ et comme g est continue, $f = g$, d'où le résultat.

6. Puisque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $x \mapsto x$ est tempérée,

$S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De plus:

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \mathcal{F}(xT) = i\partial_{\xi} \mathcal{F}(T) = i\hat{T} \\ &= i\left(-\left(\frac{2\xi+i}{\xi^2+\omega^2}\right)\hat{T}\right) \\ &= \frac{1-2i\xi}{\xi^2+\omega^2} \hat{T}. \end{aligned}$$

7. Alors: $\exists C \in \mathbb{C}, \hat{S} = T_{\xi} \mapsto \frac{(1-2i\xi)}{(\xi^2+\omega^2)^2} C e^{-i\omega \arctan(\frac{\xi}{\omega})}$

(10) et: $\forall \xi \in \mathbb{R}, \left| \frac{(1-2i\xi)}{(\xi^2+\omega^2)^2} C e^{-i\omega \arctan(\frac{\xi}{\omega})} \right|^2 = \frac{|C|^2 |1-2i\xi|^2}{(\xi^2+\omega^2)^4} = O\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)$

Donc $\xi \mapsto \frac{1-2i\xi}{(\xi^2+\omega^2)^2} C e^{-i\omega \arctan(\frac{\xi}{\omega})} \in L^2(\mathbb{R})$

Puisque $S = T_{x \mapsto x f(x)}$, par Plancherel, $x \mapsto x f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

Alors: $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1+|x|}{1+|x|} |f(x)| dx$

Cauchy-Schwarz $\rightarrow \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+|x|)^2} \right)^{1/2}}_{< +\infty} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^2 |f(x)|^2 \right)^{1/2}}_{< +\infty \text{ car } f \in L^2 \text{ et } x f \in L^2}$

Donc $f \in L^1(\mathbb{R})$.

8. Tout d'abord, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \hat{f}(0) = \frac{C}{\omega^2}$

car $\hat{f}(\xi) = \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} e^{-i\omega \arctan(\frac{\xi}{\omega})}, \forall \xi \in \mathbb{R}$.

Puis: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{C}{\xi^2 + \omega^2} \right|^2 d\xi$
 $= \frac{|C|^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \omega^2)^2} = \frac{|C|^2}{2\pi \omega^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\left(\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^2 + 1\right)^2} \stackrel{y = \frac{\xi}{\omega}}{=} \frac{|C|^2}{2\pi \omega^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega dy}{(1+y^2)^2}$
 $= \frac{|C|^2}{2\pi \omega^3} \frac{\pi}{2} = \frac{|C|^2}{4\omega^3}$. Enfin: $q(\omega) = \frac{(|C|^2)}{(\frac{|C|^2}{\omega^3})} = \frac{4}{\omega}$.