Université Paris 13, Institut Galilée
M1 de Mathématiques Fondamentales
Année universitaire 2018-2019

Devoir maison - Analyse II

A rendre pour le 7 décembre 2018

Problème 1

On rappelle que, pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a f$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tau_a f(x) = f(x-a)$.

Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On note $\tau_a T$ la forme linéaire définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ <\tau_a T, \varphi> = < T, \tau_{-a}\varphi > .$$

1. Montrer que $\tau_a T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
2. Lorsque $T = T_f$ pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ donnée, que vaut $\tau_a T$?

   On dira que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est a-périodique lorsque $\tau_a T = T$.

   On considère à présent $P = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j$, où δ_j désigne la distribution de Dirac au point $j \in \mathbb{Z}$. Alors $P \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et on l'appelle le peigne de Dirac.
3. Montrer que P est une distribution périodique de période 1.
4. Soit $E = \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\mathbf{1}_{[j,j+1[}$. Montrer que E est localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et que la distribution associée à E est tempérée.
5. Montrer que $P = E'$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. En déduire que P est une distribution tempérée.

   Dans toute la suite, on prendra la normalisation suivante pour la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:
   $$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2i\pi\xi x}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$
6. Montrer que la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de P, notée $\hat{P}$, est une distribution périodique de période 1.
7. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{e}^{2i\pi x}$. Montrer que :
   $$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \langle u\hat{P}, \varphi\rangle = \langle \hat{P}, \varphi\rangle.$$
8. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ une distribution telle que $(u-1)T = 0$. Montrer qu'il existe une famille de nombres complexes $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ telle que $T = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\delta_j$.
9. Déduire des questions précédentes l'existence d'un nombre complexe a tel que
   $$\hat{P} = a\sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_j.$$
10. En appliquant $\hat{P}$ à la fonction $\phi\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\pi x^2}$, montrer que $a = 1$. En déduire que $\hat{P} = P$. *Indication : on pourra utiliser que $\hat{\phi} = \phi$.*
11. En déduire la formule sommatoire de Poisson :
    $$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(j).$$

Problème 2

Soit ω un nombre réel strictement positif. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$(E) \qquad xT'' + (1-\omega^2 x)T = 0.$$

On désigne par Δ_ω l'espace vectoriel des solutions (E) qui sont des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si $T \in \Delta_\omega$, sa transformée de Fourier $\hat{T}$ vérifie l'équation différentielle

$$(\hat{E}) \qquad (\xi^2 + \omega^2)\hat{T}' + (2\xi + \mathrm{i})\hat{T} = 0.$$

2. Montrer que l'ensemble des solutions de $(\hat{E})$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions associées aux fonctions

$$\xi \mapsto \frac{C}{\xi^2+\omega^2} \mathrm{e}^{-\frac{i}{\omega} \arctan \frac{\xi}{\omega}}, \qquad C \in \mathbb{C}.$$

3. Justifier que toutes ces solutions sont tempérées.

4. En déduire la dimension de Δ_ω.

   Dans toute la suite, T désigne un élément de Δ_ω.

5. Montrer que $T = T_f$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

6. Soit $S = xT$. Montrer, en utilisant $(\hat{E})$, que l'on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$\hat{S} = \frac{1-2i\xi}{\xi^2+\omega^2}\hat{T}.$$

7. En déduire que la fonction à laquelle est associée S, $x \mapsto xf(x)$, est dans $L^2(\mathbb{R})$, puis en déduire que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

8. On suppose f non identiquement nulle. Posons

$$q(\omega) = \frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x}.$$

   Montrer que $q(\omega) = \frac{4}{\omega}$.

   Indication : on pourra utiliser la formule de Plancherel et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$.