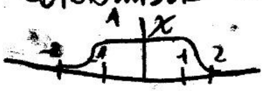
Exercice 1 :

Oui : On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(x^k f(x))(0) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx = 0$

On a : $\mathcal{F}(x^k f(x))(0) = (-1)^k\, i^k \dfrac{d^k}{d\xi^k}(\mathcal{F}f)(0)$

Donc toutes les dérivées de $\mathcal{F}f$ en 0 sont nulles.

Construisons donc $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dont toutes les dérivées en 0 sont nulles



Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $h : \xi \mapsto (1-\chi(\xi))\,g(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et a toutes ses dérivées nulles en 0.

on prend $f = \mathcal{F}^{-1}(h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

- Non. En effet, soient φ et ψ deux éléments non nuls de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que $\operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi = \emptyset$.

  Posons $f = \mathcal{F}^{-1}\varphi$ et $g = \mathcal{F}^{-1}\psi$

  Alors $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g) = \varphi\,\psi = 0.$$

  Comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a alors,

  $f * g = 0$ mais ni f ni g ne sont nulles

  car sinon φ ~~ou~~ ψ ~~le~~ serait.

- Si $f = g$, $f * f = 0$ d'où $(\mathcal{F}(f))^2 = 0$ d'où $\mathcal{F}(f) = 0$ et $f = 0$.

Exo 3 : 1. u est bien entendu $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Par ailleurs : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha u(x) = P_\alpha(x)\, u(x)$

où P_α est un polynôme de $d^\circ \leq |\alpha|$

(cela se fait par récurrence et en utilisant le fait que

$\langle Ax | x\rangle = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk} x_j x_k$.

Il vient alors : $|x^\beta \partial^\alpha u(x)| \leq C_\alpha |x|^\beta (1+|x|^\alpha)\, e^{-\varepsilon |x|^2}$

car $|u(x)| \leq e^{-\varepsilon|x|^2}$

Il est alors clair que ce second membre est uniformément borné

sur $\mathbb{R}^d$.

2. Rappelons que pour $d=1$ $(A = a > 0)$, $\hat{u}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Si $A = \mathrm{diag}(a_j)$, on a : $\langle Ax|x\rangle = \sum_{j=1}^{d} a_j x_j^2$ de sorte

que $u(x) = \prod_{j=1}^{d} e^{-a_j x_j^2}$

On a : $\forall j,\ a_j \geq \varepsilon > 0$. Comme $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour la mesure

produit, par Fubini on a :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi\rangle} u(x)\,dx = \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j\xi_j} e^{-a_j x_j^2} dx_j$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{a_1 \cdots a_d}} \prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{\xi_j^2}{4a_j}} = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}\langle A^{-1}\xi, \xi\rangle}$$

car $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_j}\right)$

3. Comme $A \in S_d(\mathbb{R})$ on peut la diagonaliser dans une BON. Alors : $\exists U$ orthogonale $({}^tU = U^{-1})$ et D diagonale,

$A = {}^tUDU$. Alors $|\det U| = 1$ et $\det A = \det D$ et

$A^{-1} = {}^tUD^{-1}U$

Posons $y = Ux$ dans l'intégrale et en utilisant

$\langle {}^tUa | b \rangle = \langle a | Ub \rangle$, on a :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x|\xi\rangle} e^{-\langle {}^tUDUx|x\rangle} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x|\xi\rangle} e^{-\langle DUx|Ux\rangle} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y|U\xi\rangle} e^{-\langle Dy|y\rangle} dy$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\underbrace{\det A}_{\det D}}} e^{-\frac{1}{4}\langle D^{-1}U\xi | U\xi\rangle}$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}\langle {}^tUD^{-1}U\xi | \xi\rangle}$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}\langle A^{-1}\xi | \xi\rangle}.$$

Exercice 4 : Principe d'incertitude de Heisenberg

1. Tout d'abord, on rappelle que : $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

D'où : $|\widehat{f'}(\xi)|^2 = \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi\right)$$

Or, par Parseval, $\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx$

D'où :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx\right)$$

2. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au membre de droite de la précédente inégalité pour obtenir :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) \geqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x) f'(x)| dx\right)^2$$

3. • On a : $|ab| = |a\bar{b}| \geqslant \mathrm{Re}(a\bar{b}) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \overline{a\bar{b}}) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$.

• On a : $\frac{d}{dx}|f(x)|^2 = \frac{d}{dx}\left(f(x)\overline{f(x)}\right) = f'(x)\overline{f(x)} + f(x)\overline{f'(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. D'où : $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x) f'(x)| dx\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\overline{f'(x)} + \overline{x f(x)} f'(x)\, dx\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(f(x)\overline{f'(x)} + \overline{f(x)} f'(x)\right) dx\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx}|f(x)|^2\, dx\right)^2$$

$$\overset{IPP}{=} \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\left[x|f(x)|^2\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ car } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx}_{\substack{\shortparallel \\ 1}}\Big]^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

On a donc bien :

$$\underline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 \, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right) \geq \frac{1}{4}} .$$

Comme $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ et $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, on peut interpréter $x \mapsto |f(x)|^2$ et $\xi \mapsto |\hat{f}(\xi)|^2$ comme des densité de probabilité. Alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx$ est la variance de la variable x pour la mesure de probabilité $|f(x)|^2 dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 dx$ est la variance de la variable ξ pour la mesure de probabilité $|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$. Le principe d'incertitude de Heisenberg affirme donc que le produit des variances de deux quantités conjuguées au sens de Fourier est minoré par une constante indépendante de ces variables.

Si on passe à la racine carrée dans l'inégalité obtenue on a une inégalité sur les écarts-type de x et ξ :

$$\Delta x . \Delta \xi \geq \frac{1}{2} .$$

En mécanique quantique, des exemples de telles variables conjuguées sont : la position x et la quantité de mouvement p :

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

ou l'énergie et le temps :

$$\Delta E . \Delta t \geq \hbar$$