

## Feuille de TD 1 : Espace de Schwartz - Transformée de Fourier

### Exercice 1

Existe-t-il une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  non identiquement nulle telle que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx = 0$ ?

### Exercice 2

Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . On suppose que  $f \star g$  est identiquement nulle. Peut-on affirmer que  $f$  ou  $g$  est nulle ? Qu'en est-il si  $f = g$  ?

### Exercice 3 - Transformée de Fourier de la gaussienne

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle dans  $S_d(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $c_0 > 0$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \langle Ax|x \rangle \geq c_0 |x|^2.$$

1. Montrer que la fonction gaussienne  $u : x \mapsto e^{-\langle Ax|x \rangle}$  est dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

2. En utilisant la formule obtenue pour la transformée de la Gaussienne pour  $d = 1$  (voir cours), déterminer la transformée de Fourier de  $u$  dans le cas où  $A$  est une matrice diagonale.

3. En diagonalisant  $A$  dans une base orthonormée de  $\mathbb{R}^d$ , montrer que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \hat{u}(\xi) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\det(A)}} e^{-\frac{1}{4} \langle A^{-1} \xi | \xi \rangle}.$$

### Exercice 4 - Principe d'incertitude de Heisenberg

Soit  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  de norme  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ . On veut montrer l'inégalité suivante :

$$(1) := \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4}.$$

1. En utilisant la relation  $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$ , montrer que

$$(1) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right).$$

2. En déduire que  $(1) \geq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)f'(x)| dx \right)^2$ .

3. Justifier que pour deux nombres complexes  $a$  et  $b$ , on a  $|ab| \geq \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$ . Justifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d}{dx} |f(x)|^2 = f(x)\overline{f'(x)} + \overline{f(x)}f'(x)$ .

4. Déduire l'inégalité recherchée des questions 2 et 3. Interprétez cette inégalité en termes probabilistes.