Exercice 1 :

1. Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |P(x)|$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos(e^x)| \leq \dfrac{|P(x)|}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(e^x) = 0$. Or, si on considère la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1, \; x_n = \log(2n\pi)$, on a :

$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\forall n \geq 1, \; \cos(e^{x_n}) = \cos(2n\pi) = 1$.

Donc, on ne peut pas avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(e^x) = 0$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soient m et M dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_m^M f(x)\varphi(x)\,dx = \int_m^M \varphi(x) \underbrace{e^x \cos(e^x)}_{\frac{d}{dx}(\sin(e^x))} dx = \left[\varphi(x)\sin(e^x)\right]_m^M - \int_m^M \varphi'(x)\sin(e^x)\,dx$$

Alors : $\left| \varphi(M)\sin(e^M) - \varphi(m)\sin(e^m) \right| \leq |\varphi(M)| + |\varphi(m)|$

Or : $|\varphi(m)| \underset{m\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|\varphi(M)| \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

② Puis, comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\varphi'(x)\sin(e^x)| \leq |\varphi'(x)|$ et que $\varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\sin(e^x)\,dx$ est absolument convergente.

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ est convergente.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$|\langle S, \varphi\rangle| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx\right|$$

par 2. $\rightarrow$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} |\sin(e^x)\,\varphi'(x)|\,dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^2}\,|\varphi'(x)|\,dx$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left((1+x^2)|\varphi'(x)|\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2}}_{=\pi}$$

$$\leq \pi \sup_{x\in\mathbb{R}}\left((1+x^2)\,|\varphi'(x)|\right)$$

Donc S est bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

On commence par déterminer les solutions "classiques" de l'équation homogène associée $u'+u=0$. On trouve : $\forall x\in\mathbb{R},\ u(x)=Ce^{-x}$, $C\in\mathbb{R}$

Puis on cherche une distribution S solution particulière de $u'+u=\delta_0$ de la forme $S=e^{x}T$ où T est solution de $u'+u=\delta_0$. ("variation de la constante"). On a alors :

$$S'=(e^{x}T)'=e^{x}(T+T')=\delta_0\, e^{x}=\delta_0 e^{0}=\delta_0 .$$

Donc $S=\underbrace{H}_{\text{distribution de Heaviside : fonction caractéristique de } \mathbb{R}_+}+\,C$, $C\in\mathbb{R}$.

D'où : $T=H\,e^{-x}+Ce^{-x}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Or, la distribution associée à $x\mapsto e^{-x}$ n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (voir le comportement en $-\infty$), donc la seule solution de $u'+u=\delta_0$ qui soit dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la distribution : $\boxed{T=He^{-x}}$

Exercice 3 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a : $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-ia\xi}$. Puis par inversion de Fourier, $\mathcal{F}\mathcal{F}(\delta_a) = \mathcal{F}(e^{-ia\xi})$ avec $\mathcal{F}\mathcal{F} = 2\pi\, \sigma$ où $\sigma : \xi \mapsto -\xi$. D'où : $\delta_a = \frac{\sigma}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-ia\xi}) = \frac{\mathcal{F}(e^{ia\xi})}{2\pi}$.

Donc : $\boxed{\mathcal{F}(e^{iax}) = 2\pi\, \delta_a}$

2. On écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

D'où, par linéarité de $\mathcal{F}$ et par 1. :

$$\mathcal{F}(\cos x) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(e^{ix}) + \mathcal{F}(e^{-ix})\right) = \pi(\delta_{-1} + \delta_1)$$

3. On a :

$$\mathcal{F}(x \sin x) = i\partial_\xi\, \mathcal{F}(\sin x) = i\partial_\xi\left(\frac{\pi}{i}\left(\delta_{-1} - \delta_1\right)\right)$$
$$= \pi\left(\delta_{-1}' + \delta_1'\right).$$

4. Méthode directe : Si $u = \mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, comme $\sin x = \frac{\sin x}{x} \times x$, on a : $iu' = \mathcal{F}(\sin x)$, d'où : $u' = \mathcal{F}\left(-ix \frac{\sin x}{x}\right)$

et par 3. $u' = -\pi(\delta_1 - \delta_{-1})$ $(*)$

Alors : $u'|_{]-\infty,-1[} = 0$, $u'|_{]-1,1[} = 0$ et $u'|_{]1,\infty[} = 0$

$\Rightarrow u|_{]-\infty,-1[} = a$ $\qquad \Rightarrow u|_{]-1,1[} = b$ $\qquad \Rightarrow u|_{]1,\infty[} = c$

Si on pose $\tilde{u} = \begin{cases} a & \text{si } x < -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 1 \\ c & \text{si } x > 1 \end{cases}$, alors, par la formule des sauts : $\tilde{u}' = (b-a)\delta_{-1} + (c-b)\delta_1$ et on veut a, b, c tels que : $b - a = \pi$ et $c - b = -\pi$. Cela conduit à $c = a$ et $b = \pi + a$.

Alors : $\tilde{u} = a + \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$ est solution de $(*)$ D'où la solution générale de $(*)$: $u = \tilde{u} + cte = A + \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$, $A \in \mathbb{R}$.

Or, $\frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$, donc par le théorème de Plancherel, $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$. Donc, comme la constante A n'est pas $L^2(\mathbb{R})$, hormis si elle est nulle, on doit avoir $A=0$.

Finalement : $\underline{\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}}$.

<u>Méthode inverse :</u> On a : $\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)\right) = \int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{2\sin\xi}{\xi}$

Puis : $$\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)\right) = 2\,\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$
$$\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)\right) = 2\pi \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$$

D'où : $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$.

5. On a, puisque $x \mapsto e^{-a|x|} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $a>0$:

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{ax-ix.\xi}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax-i\xi x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$$

Donc : $\underline{\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}}$

6. De même : $\mathcal{F}(|x|e^{-a|x|})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-a|x|} e^{-ix\xi}\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{0} -x e^{ax-ix\xi}\,dx + \int_0^{+\infty} x e^{-ax-ix\xi}\,dx$$

$$= \left[-x \frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x}\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi}\,dx + \left[-\frac{x}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x}\right]_0^{+\infty}$$
$$+ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi}\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2} \right]_{-\infty}^{0} + 0 + \left[- \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(a-i\xi)^2} + \frac{1}{(a+i\xi)^2} = \frac{(a+i\xi)^2 + (a-i\xi)^2}{(a^2+\xi^2)^2} = \frac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}$$

Donc : $\underline{\mathcal{F}(|x| e^{-a|x|}) = \dfrac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}}$

7. Comme $\sin 0 = 0$, on a : $\sin|x| = \sin x \, 1_{x>0} - \sin x \, 1_{x<0}$

On : $\sin x \, 1_{x>0} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sin x \, e^{-\varepsilon x} 1_{x>0}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. $(*)$

On : $\forall \varepsilon > 0$, $\mathcal{F}(\sin x \, e^{-\varepsilon x} 1_{x>0})(\xi) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x \, e^{-\varepsilon x - ix\xi} dx$

$$= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{x(i - \varepsilon - i\xi)} dx - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-x(i+\varepsilon+i\xi)} dx$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i(\xi-1)+\varepsilon} - \frac{1}{i(\xi+1)+\varepsilon} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi-1-i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+1-i\varepsilon} \right)$$

$$\frac{1}{y+a-i\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} vp\left(\frac{1}{y+a}\right) + i\pi \delta_{-a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Donc : $\mathcal{F}(\sin x \, e^{-\varepsilon x} 1_{x>0}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -\frac{1}{2}\left(vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right)\right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$

Et de même : $\mathcal{F}(\sin x \, e^{\varepsilon x} 1_{x<0}) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \frac{1}{2}\left(vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right)\right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$

D'où, comme la convergence de $(*)$ a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{\mathcal{F}(\sin|x|) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\mathcal{F}(\sin e^{-\varepsilon x} 1_{x>0}) - \mathcal{F}(\sin x \, e^{\varepsilon x} 1_{x<0})\right) = vp\left(\frac{1}{\xi+1}\right) - vp\left(\frac{1}{\xi-1}\right)}$$

Exercice 4:

Soit $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ et notons $\psi = \varphi \circ A^{-1}$. Comme $T \in S'(\mathbb{R}^d)$,

$$\exists k, \ell, \quad |\langle T\circ A, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \max_{\beta \leq k} \left((1+|x|)^\beta \sum_{|\alpha|\leq \ell} |\partial_x^\alpha \psi(x)| \right)$$

Or, A^{-1} étant constante (ind de x),

$$\partial_x^\alpha \psi(x) = \sum_{|\gamma|\leq|\alpha|} c_{\alpha\beta} (\partial_y^\beta \varphi)(A^{-1}x) \quad c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$$

En posant $x = Ay$ on en déduit que $|x| \leq C'|y|$ et

$$|\langle T\circ A, \varphi\rangle| \leq C'' \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \max_{\beta\leq k} \left((1+|y|)^\beta \sum_{|\alpha|\leq \ell} |\partial_y^\alpha \varphi(y)| \right)$$

Donc : $T\circ A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Puis par définition :

$$\langle \mathcal{F}(T\circ A), \varphi\rangle = \langle T\circ A, \mathcal{F}(\varphi)\rangle$$
$$= |\det A|^{-1} \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\circ A^{-1}\rangle$$

Or, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(\varphi)(A^{-1}\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x | A^{-1}\xi\rangle} \varphi(x)\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle {}^t(A^{-1})x|\xi\rangle} \varphi(x)\,dx.$$

En posant $y = ({}^tA^{-1})x = ({}^tA)^{-1}x$ il vient $dx = |\det A|\,dy$ et

8) finalement, $= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y | \xi \rangle} \varphi({}^tAy) \, |\det A|^{-1} \, dy$

soit $\mathcal{F}(\varphi)(A^{-1}\xi) = |\det A|^{-1} \mathcal{F}(\varphi \circ {}^tA)(\xi)$

Alors : $\langle \mathcal{F}(T \circ A), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi \circ {}^tA) \rangle \; |\det A|^{-2}$

$$= \langle \mathcal{F}(T), \varphi \circ {}^tA \rangle \times |\det A|^{-2}$$

$$= |\det A| \, \langle \mathcal{F}(T) \circ ({}^tA)^{-1}, \varphi \rangle \times |\det A|^{-2}$$

$$= |\det A|^{-1} \langle \mathcal{F}(T) \circ ({}^tA)^{-1}, \varphi \rangle .$$

Exercice 5 :

1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$|e^{-(\varepsilon - ia)x^2} \varphi(x)| = |e^{-\varepsilon x^2} \varphi(x)| \leq |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

donc par le TCD,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\varepsilon - ia)x^2} \varphi(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{iax^2} \varphi(x) \, dx$$

D'où la cv dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

2. Posons $g_\varepsilon(x) = e^{-(\varepsilon - ia)x^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors (g_ε) cv vers f dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Donc $(\hat{g}_\varepsilon)$ cv vers $\hat{f}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. On :

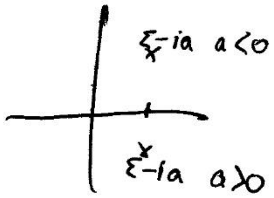
$$\hat{g}_\varepsilon(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-zx^2} dx \quad \text{avec } z = \varepsilon - ia .$$

(2) Par la formule vue en cours :

$$\hat{g}_\varepsilon(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon - ia}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon - ia)}}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, $\sqrt{\varepsilon - ia}$ cv vers $e^{-i\frac{\pi}{4}}\sqrt{a}$ si $a>0$

et vers $e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{|a|}$ si $a<0$



D'autre part, $\left(e^{-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon - ia)}}\right)$ cv vers $e^{-i\frac{\xi^2}{4a}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

En effet, pour ξ fixé, $e^{-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon-ia)}} \to e^{-i\frac{\xi^2}{4a}}$ et si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\left|e^{-\frac{\xi^2}{4(\varepsilon-ia)}}\varphi(\xi)\right| = \left|e^{-\frac{(\varepsilon+ia)\xi^2}{4(\varepsilon^2+a^2)}}\varphi(\xi)\right| = \left|e^{-\frac{\varepsilon\xi^2}{4(\varepsilon^2+a^2)}}\varphi(\xi)\right|$$

$$\leq |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$$

Donc $(\hat{g}_\varepsilon)$ qui cv vers $\hat{f}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, cv également dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la fonction de l'énoncé.

Par unicité de la limite on obtient le résultat voulu.

3. On a : $e^{i\langle Dx|x\rangle} = \prod_{j=1}^{d} e^{\lambda_j x_j^2}$ si $D = \mathrm{diag}(\lambda_j)$.

Alors $\mathcal{F}(e^{i\langle Dx|x\rangle}) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{F}(e^{\lambda_j x_j^2})$ (produit tensoriel).

Par 2. Chaque j tq $\lambda_j > 0$ donne une contribution $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et chaque $\lambda_j < 0$ une $e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

(10) Le coefficient de $\frac{\pi}{4}$ est donc $\cancel{k+}(d-(k+1)+1) = 2k-d$.

D'où : $\mathcal{F}(e^{i\langle Dx|x\rangle}) = e^{i(2k-d)\frac{\pi}{4}} \prod_{j=1}^{d} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda_j|}} \prod_{j=1}^{d} e^{-i\frac{\xi_j^2}{4\lambda_j}}$

$$= e^{i(2k-d)\frac{\pi}{4}} \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{|\lambda_1 \cdots \lambda_d|}} e^{-i\sum_{j=1}^{d}\frac{\xi_j^2}{4\lambda_j}}$$

$D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)$

$$= e^{i(2k-d)\frac{\pi}{4}} \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{|\det D|}} e^{-\frac{i}{4}\langle D^{-1}\xi|\xi\rangle}$$

<u>4.</u> $\exists\, U$ ortho et D diag, $A = {}^tUDU$ et $A^{-1} = U^{-1}D^{-1}({}^tU)^{-1}$
$= {}^tU D^{-1}(U^{-1})^{-1}$
$= {}^tUD^{-1}U$

Comme $\langle Ax|x\rangle = \langle {}^tUDUx|x\rangle = \langle DUx|Ux\rangle$

on a $e^{i\langle Ax|x\rangle} = e^{i\langle Dx|x\rangle} \circ U$

Alors $\mathcal{F}(e^{i\langle Ax|x\rangle}) = |\det U|^{-1}\mathcal{F}(e^{i\langle Dx|x\rangle}) \circ ({}^tU)^{-1}$

$$= \mathcal{F}(e^{i\langle Dx|x\rangle}) \circ U \quad \text{car } U \text{ ortho,}$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\underbrace{|\det D|}_{=\det A}}} e^{i\frac{\pi}{4}\underbrace{(2k-d)}_{=\sigma_A}} e^{-\frac{i}{4}\underbrace{\langle D^{-1}U\xi|U\xi\rangle}_{=\langle {}^tUD^{-1}U\xi|\xi\rangle = \langle A^{-1}\xi|\xi\rangle}}$$

$$= \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{|\det A|}} e^{i\sigma_A\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{i}{4}\langle A^{-1}\xi|\xi\rangle}$$

(11) Exercice 6 :

1. Soit $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$. Alors $\hat{\psi} \in S(\mathbb{R}^2)$ et en particulier,

$$\exists C > 0, \quad (1+|x|^2)\,|\hat{\psi}(x,x)| \leq C, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $x \mapsto |\hat{\psi}(x,x)|$ appartient donc à $L^1(\mathbb{R})$

Puis : $\langle \hat{T}, \psi \rangle = \langle T, \hat{\psi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(x,x)\,dx$

$$\overset{TCD}{=} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x^2}\, \hat{\psi}(x,x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon .$$

2. On a : $\hat{\psi}(x,x) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-ix(\xi+\eta)}\, \psi(\xi,\eta)\,d\xi\, d\eta$

On pour tout $\varepsilon > 0$, $(x,\xi,\eta) \mapsto e^{-ix(\xi+\eta)} e^{-\varepsilon x^2} \psi(\xi,\eta)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^3)$ (par Tonelli), on peut appliquer Fubini et écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad I_\varepsilon = \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(\xi,\eta) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi+\eta)} e^{-\varepsilon x^2} dx \right) d\xi\, d\eta$$

Or : $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi+\eta)} e^{-\varepsilon x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\, e^{-\frac{(\xi+\eta)^2}{4\varepsilon}}$

D'où par Fubini :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad I_\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi,\eta)\, e^{-\frac{(\xi+\eta)^2}{4\varepsilon}} d\eta \right) d\xi .$$

(12) On pose dans l'intégrale en η, $\eta = 2\sqrt{\varepsilon}\,\rho - \xi$ et on utilise encore Fubini pour obtenir :

$$I_\varepsilon = 2\sqrt{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\rho^2} \psi(\xi, 2\sqrt{\varepsilon}\,\rho - \xi)\, d\xi\, d\rho$$

$$:= 2\sqrt{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(\xi, \rho)\, d\xi\, d\rho$$

3. On veut appliquer le TCD. A (ξ, ρ) fixé,

$$f_\varepsilon(\xi,\rho) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} e^{-\rho^2} \psi(\xi, -\xi)$$

Comme $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\exists C_0 > 0$, $(1+|\xi|^2)|\psi(\xi,\eta)| \leq C_0$

et en particulier :

$\forall (\xi, \rho, \varepsilon)$, $(1+|\xi|^2)|\psi(\xi, 2\sqrt{\varepsilon}\,\rho - \xi)| \leq C_0$.

D'où : $|f_\varepsilon(\xi, \rho)| \leq \dfrac{C_0 e^{-\rho^2}}{1+|\xi|^2} \in L^1(\mathbb{R}^2)$

D'où par TCD :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = 2\sqrt{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\rho^2} d\rho\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \psi(\xi, -\xi)\, d\xi\right)$$

$$= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi, -\xi)\, d\xi$$

Finalement par 1.,

$$\langle \hat{T}, \psi \rangle = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi, -\xi)\, d\xi.$$

Exercice 7

Par le théorème de Plancherel, comme $\frac{d^4 u}{dx^4} + k u \in L^2(\mathbb{R})$,

$((i\xi)^4 + k)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Donc $\hat{u}$ est mesurable. Comme

$k > 0$, $(i\xi)^4 + k = k + \xi^4 > 0$.

- Si $|\xi| \leq 1$, alors $\forall j \in \{0, .., 4\}$, $|\xi|^j \leq 1 \leq C_1 k$ si $C_1 \geq \frac{1}{k}$

  Donc : $\exists C_1 > 0$, $|\xi|^j \leq C_1 k \leq C_1 (k + \xi^4)$.

- Si $|\xi| \geq 1$, alors pour $C_2 \geq 1$, $|\xi|^j \leq C_2 |\xi|^4 = C_2 \xi^4$

  D'où : $\exists C_2 > 0$ (≥ 1), $|\xi|^j \leq C_2(\xi^4 + k)$

Si $C = \max(C_1, C_2)$, on vient de montrer que dans tous les cas :

$\exists C > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $|\xi|^j \leq C(k + \xi^4) \Rightarrow |\xi|^j |\hat{u}| \leq C(k + \xi^4)|\hat{u}|$

pour tout $j \in \{0, .., 4\}$. Par majoration, comme $(k + \xi^4)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$,

$\xi^j \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $j \in \{0, ..., 4\}$.

Par Plancherel : $\frac{d^j u}{dx^j} \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall j \in \{0, .., 4\}$.

Exercice 8 :

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et soit $t>0$. On a, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle T, \varphi_t \rangle| = |\langle \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} T, \varphi_t \rangle|$$

$$= \left|\left\langle \mathcal{F} T, \left(\frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F} \circ \sigma)\right) \varphi_t \right\rangle\right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{T}(\xi) \left(\frac{1}{(2\pi)^n} (\mathcal{F} \circ \sigma) \varphi_t \right)(\xi) \, d\xi \right|$$

$$\leq \|\hat{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \times \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |((\mathcal{F} \circ \sigma) \varphi_t)(\xi)| \, d\xi.$$

On : $$((\mathcal{F} \circ \sigma) \varphi_t)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) e^{ix\xi} \, dx \underset{\substack{\uparrow \\ y = \frac{x}{t} \quad dx = t^n dy}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{ity\xi} t^n dy$$

$$= t^n \hat{\varphi}(-t\xi)$$

D'où : $$\int_{\mathbb{R}^n} |((\mathcal{F} \circ \sigma) \varphi_t)(\xi)| \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |t^n \hat{\varphi}(-t\xi)| \, d\xi$$

$$\underset{\varsigma = t\xi}{=} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(-\varsigma)| \, d\varsigma = \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

D'où :

$$|\langle T, \varphi_t \rangle| \leq \|\hat{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \, \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \times \frac{1}{(2\pi)^n}.$$