Institut Galilée **2018-2019**
M1 Mathématiques Fondamentales
Distributions tempérées et espaces de Sobolev

Feuille de TD 2 : Distributions tempérées

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$.
1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |P(x)|$.

2. Montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

3. Montrer que S définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ < S, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2
Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $u' + u = \delta_0$.

Exercice 3
Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ associées aux fonctions suivantes:

$$1.\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\ (a \in \mathbb{R}), \quad 2.\ \cos(x), \quad 3.\ x\sin(x), \quad 4.\ \frac{\sin(x)}{x}$$

$$5.\ \mathrm{e}^{-a|x|}\ (a > 0), \quad 6.\ |x|\mathrm{e}^{-a|x|}\ (a > 0), \quad 7.\ \sin(|x|).$$

Exercice 4
Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $A \in \mathrm{GL_d}(\mathbb{R})$. On pose, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T \circ A, \varphi \rangle = |\det A|^{-1} \langle T, \varphi \circ A^{-1} \rangle.$$

Montrer que $T \circ A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que l'on a

$$\mathcal{F}(T \circ A) = |\det A|^{-1} \mathcal{F}(T) \circ ({}^tA)^{-1}.$$

Exercice 5

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax^2}$. Montrer que dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a

$$f = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{e}^{-(\varepsilon - \mathrm{i}a)x^2}.$$

2. En utilisant le résultat du calcul de la Gaussienne vu en cours, montrer que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi^2}{4a}} & \text{si} \quad a > 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\xi^2}{4a}} & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

3. Soit D une matrice diagonale réelle de taille d, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ avec $\lambda_j > 0$ pour $j \in \{1, \ldots k\}$ et $\lambda_j < 0$ pour $j \in \{k+1, \ldots d\}$. Montrer que

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}<Dx|x>}) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{|\det D|}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}<D^{-1}\xi|\xi>}.$$

4. Soit A une matrice réelle symétrique et inversible. On note σ_A la signature de A qui est l'entier égal au nombre de valeurs propres de A strictement positives moins le nombre de valeurs propres de A strictement négatives. Déduire de la question précédente que

$$\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}<Ax|x>}) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{|\det A|}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_A\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{i}<A^{-1}\xi|\xi>}.$$

Exercice 6

On se propose de calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),\ < T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x)\mathrm{d}x.$$

1. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose :

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\varepsilon x^2} \widehat{\psi}(x, x)\mathrm{d}x.$$

Montrer que l'on a $< \widehat{T}, \psi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon$.
2. En exprimant $\widehat{\psi}(x, x)$, montrer que l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ I_\varepsilon = 2\sqrt{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\zeta^2} \psi(\xi, 2\sqrt{\varepsilon}\zeta - \xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta.$$

3. En déduire $\widehat{T}$.

Exercice 7

Soient $k > 0$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tels que $\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} + ku \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}x^j} \in L^2(\mathbb{R})$ pour $0 \leq j \leq 4$.

Exercice 8

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$, on note φ_t la fonction définie par $\varphi_t(x) = \varphi(\frac{x}{t})$. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. En utilisant le fait que $T = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T$, montrer que,

$$\forall t > 0,\ |< T, \varphi_t >| \leq \frac{1}{(2\pi)^d} ||\widehat{T}||_{L^\infty}\ ||\widehat{\varphi}||_{L^1}.$$