1

# Feuille de TD 3 : Espaces de Sobolev

## Exercice 1:

- On a : $\hat{\delta}_0 = 1$, d'où : $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff (1+|\xi|^2)^{s/2} \times 1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\iff (1+|\xi|^2)^s \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff 2s < -n \iff \boxed{s < -\frac{n}{2}}$$

- On a : $\widehat{\delta_0'} = i\xi \hat{\delta}_0 = i\xi$. D'où :

$$\delta_0' \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff (1+|\xi|^2)^{s/2} |\xi| \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff (1+|\xi|^2)^s |\xi|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff 2s+2 < -n \iff \boxed{s < -\frac{n}{2} - 1}$$

- Pour $k \in (\mathbb{N})^n$, $\widehat{\delta_0^{(k)}} = (i\xi)^k \hat{\delta}_0 = (i\xi)^k$. D'où :

$$\delta_0^{(k)} \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff (1+|\xi|^2)^{s/2} |\xi|^{|k| \leftarrow \text{longueur de } k} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff (1+|\xi|^2)^s |\xi|^{2|k|} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\iff 2s + 2|k| < -n \iff \boxed{s < -\frac{n}{2} - |k|}$$

- Pour $n=1$, $\hat{H} = \frac{1}{i} vp\left(\frac{1}{\xi}\right) + \pi\delta_0$. On : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\pi (1+|\xi|^2)^{s/2} \delta_0(\xi) = \pi$ qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ H \notin H^s(\mathbb{R})}$.

2

## Exercice 2

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\Delta^2 u + 2\Delta u - u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Par transformée de Fourier et par Plancherel :

$$|\xi|^4 \hat{u}(\xi) + 2|\xi|^2 \hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \quad (|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1)\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Or, on veut montrer que $(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui signifie exactement que $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

On écrit :

$$(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) = \underbrace{\frac{(1+|\xi|^2)^2}{|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)} \underbrace{(|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1)\hat{u}(\xi)}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$L^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$ où $K$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ contenant les zéros de $|\xi|^4 - 2|\xi|^2 - 1$. (si $\xi \in \mathbb{R}^n$ est un tel zéro, $|\xi| \leq \max\{|x| \mid x \in \mathbb{R}$ et $x^4 - 2x^2 - 1 = 0\}$)

Donc $(1+|\xi|^2)^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $u \in H^4(\mathbb{R}^n)$.

③

## Exercice 3

Soit $s \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord, montrons que P est bien défini de $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. Soit $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$. On a :

$$\mathcal{F}(-\Delta u + \lambda u)(\xi) = (|\xi|^2 + \lambda)\hat{u}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

D'où : $(1+|\xi|^2)^{s/2} |\mathcal{F}(-\Delta u + \lambda u)| = (1+|\xi|^2)^{s/2}(|\xi|^2+\lambda)|\hat{u}|$

$$\leq \max(1,\lambda)\ (1+|\xi|^2)^{s/2+1} |\hat{u}| \quad (*)$$

Comme $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$, $(1+|\xi|^2)^{s/2+1}|\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

D'où : $-\Delta u + \lambda u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Comme P est linéaire, P est bien linéaire de $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

- Montrons que P est une application linéaire continue. D'après l'inégalité $(*)$ : $\|-\Delta u + \lambda u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \max(1,\lambda)\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^n)}$

  i.e : $\forall u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$, $\|Pu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \max(1,\lambda)\|u\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^n)}$.

Ainsi, P est continue et $|||P||| \leq \max(1,\lambda)$.

- Montrons que P est injective. Soit $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ telle que $Pu = 0$.

  Alors : $(|\xi|^2+\lambda)\hat{u} = 0$ et comme $|\xi|^2+\lambda > 0$, $|\xi|^2+\lambda \neq 0$

  d'où : $\hat{u} = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. D'où $u = 0$. Donc $\operatorname{Ker} P = \{0\}$.

  et P est injective.

- Montrons que P est surjective. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Posons $u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}}{|\xi|^2+\lambda}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}(Pu) = (|\xi|^2+\lambda)\hat{u} = \hat{f}$.

Donc : $Pu = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Il nous reste à vérifier que $u$ telle qu'on l'a définie est dans $H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$.

(4) On a:

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s+1}{2}} \; |\hat{u}| = (1+|\xi|^2)(1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{u}|$$

$$= \frac{1+|\xi|^2}{\lambda+|\xi|^2} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{f}|.$$

$$\leq \max\left(1, \frac{1}{\lambda}\right) (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{f}|$$

Or, comme $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{f}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, $(1+|\xi|^2)^{s/2+1} |\hat{u}| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Donc $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$.

Ainsi, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, il existe $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ telle que $Pu = f$. $P$ est bien surjective.

- Il reste à vérifier que $P^{-1}$ est continue. Or, $P$ est une bijection linéaire continue entre deux espaces de Banach, $P^{-1}$ est donc continue par le théorème de l'isomorphisme de Banach.

# Exercice 4 :

1. Pour $t=0$, on a $u(0)=f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par hypothèse.

Puis, si $t>0$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donc $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\xi \mapsto e^{-t\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

Donc $\xi \mapsto e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}\hat{f}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Donc : $\boxed{\forall t \geq 0,\ u(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})}$

2. On a : $\mathcal{F}(u(t)) = e^{-t\xi^2}\hat{f}$, donc $\widehat{u(t)}$ est une fonction mesurable

et :
$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\widehat{u(t)}(\xi)| = (1+|\xi|^2)^{s/2}\,|e^{-t\xi^2}\hat{f}(\xi)|$$
$$\leq (1+|\xi|^2)^{s/2}\,|\hat{f}(\xi)|.$$

Comme $f \in H^s(\mathbb{R})$, ce majorant est dans $L^2(\mathbb{R})$. Donc $u(t) \in H^s(\mathbb{R})$ et l'inégalité ci-dessus se réécrit :

$$\boxed{\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $t>0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)| = |\xi^k \widehat{u(t)}(\xi)| = |\xi|^k e^{-t\xi^2} |\hat{f}(\xi)|$$

- Si $k=0$, $C=1$ convient en majorant $e^{-t\xi^2}$ par $1$ et en intégrant sur $\mathbb{R}$ puis en appliquant Plancherel.
- Supposons $k \geq 1$. On commence par déterminer :

$$\sup_{x \geq 0} x^k e^{-tx^2}.$$

Soit $g : \begin{array}{l}\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^k e^{-tx^2}\end{array}$. Alors $\forall x \geq 0$, $g'(x) = kx^{k-1}e^{-tx^2} + x^k(-2tx)e^{-tx^2}$
$$= x^{k-1}(k-2tx^2)e^{-tx^2}.$$

Alors : $g'(x)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=\sqrt{\frac{k}{2t}} \end{cases}$.

Puis : $g(0)=0$ et $g\left(\sqrt{\frac{k}{2t}}\right) = \left(\sqrt{\frac{k}{2t}}\right)^k e^{-t\frac{k}{2t}} = e^{-k/2}\sqrt{\frac{k}{2}}\ \frac{1}{t^{k/2}}$.

D'où, en posant $C_k = e^{-k/2}\sqrt{\frac{k}{2}}$ : $\sup_{x \geq 0} x^k e^{-tx^2} = \frac{C_k}{t^{k/2}}$.

6

Alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\quad |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)| \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} |\hat{f}(\xi)|$$

$$\Leftrightarrow \forall \xi \in \mathbb{R},\quad |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)|^2 \leq \frac{C_k^2}{t^k} |\hat{f}(\xi)|^2$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(D_x^k u(t))(\xi)|^2 d\xi \leq \frac{C_k^2}{t^k} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

i.e. :

$$\|\mathcal{F}(D_x^k(u(t)))\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

et par Plancherel (comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(D_x^k(u(t)))$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$) :

$$\boxed{\|D_x^k u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C_k}{t^{k/2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \text{ avec } C_k = e^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{k}{2}} > 0}$$

4.a. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Soit $t > 0$. Alors $e^{-t\xi^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De plus, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors :

$$u(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}\hat{f})(x) = (\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) * f)(x)$$

Or, comme $\mathcal{F}(e^{-tx^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}$, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(-x)^2}{4t}}.$$

D'où :

$$\boxed{u(t)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left(e^{-\frac{x^2}{4t}} * f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)\, dy}$$

b. On : $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0$, $\left|e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\right| \leq 1$. D'où :

$$\boxed{\forall t > 0,\quad \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.}$$

(7) **5.a.** On rappelle que la transformée de Fourier injecte continûment $L^1(\mathbb{R})$ dans $C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Donc, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

De plus, si $xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $D_\xi \hat{f} \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

D'où : $\boxed{\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).}$

**b.** Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Comme $\hat{f}$ est $C^1$, on peut écrire : $\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0) = \int_0^\xi \hat{f}'(u)\,du$

$$= \xi \int_0^1 \hat{f}'(s\xi)\,ds.$$

D'où : $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi| \, \|\hat{f}'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$

$$= |\xi| \, \|\widehat{xf}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq |\xi| \, \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Donc : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R} : |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \leq |\xi| \, \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.}$

**c.** Soit $t > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$. On a :

$$|v(t,\xi)| = |\hat{f}(\xi) - \hat{f}(0)| \, e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \leq |\xi| e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Or par une étude analogue à celle menée à la question 3., on a :

$$\sup_{x \geq 0} x e^{-\frac{1}{2}tx^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}$$

D'où : $$\boxed{|v(t,\xi)| \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}} \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.}$$

(8)

**d.** On a : $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi)\, e^{-t\xi^2} = e^{-t\xi^2}\, \hat{f}(0) + e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, v(t,x)$

D'où : $u(t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\xi^2})\, \hat{f}(0) + \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, v(t,x))$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, v(t,x))$$

Posons $\boxed{R(t)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, v(t,x)).}$

Alors : $\boxed{u(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + R(t)(x)}$

De plus : $\forall t>0,\ |R(t)(x)| = \frac{1}{2\pi}\left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\, e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, v(t,\xi)\,d\xi \right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, |v(t,\xi)|\,d\xi$$

par 5.c. $\rightarrow$ $\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}\, \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}\,d\xi$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{t}}\, \|xf\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\,d\xi$$

Or : $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}\,d\xi = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{1}{2}t\xi^2})(0) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{2}t}}\, e^{-\frac{(-0)^2}{2t}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Donc, si on pose $C = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} > 0$, on a bien :

$$\forall t>0,\ |R(t)(x)| \leq \frac{C}{t}\|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Ainsi, $R(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ et : $\boxed{\forall t>0,\ \|R(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{t}\|xf\|_{L^1(\mathbb{R})}}$

# Exercice 5 :

Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et pour $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon = \sqrt{|u|^2 + \varepsilon^2}$.

1. Alors -

On a : $u_\varepsilon \leq |u| + \varepsilon$

D'où : $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, $\left| \int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon \varphi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u||\varphi| + \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon |\varphi|$

$$\leq \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d}{2}+1}} \times \|(1+|x|^2)^{\frac{d}{2}+1} \varphi\|_\infty$$

$$\leq \|u\|_{L^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{d}{2}+1}}}_{C} \|(1+|x|^2)^{\frac{d}{2}+1} \varphi\|_\infty + \varepsilon C \|(1+|x|^2)^{\frac{d}{2}+1} \varphi\|_\infty$$

$$\leq C(\|u\|_{L^2} + \varepsilon) \|(1+|x|^2)^{\frac{d}{2}+1} \varphi\|_\infty$$

Donc $u_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Puis on veut montrer que $\nabla u_\varepsilon = \dfrac{Re(\bar{u} \nabla u)}{\sqrt{|u|^2 + \varepsilon}}$

On sait qu'il existe $(u_j) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))^{\mathbb{N}}$ tq

$$u_j \xrightarrow{L^2} u \quad \text{et} \quad \nabla u_j \xrightarrow{L^2} \nabla u$$

Posons $u_{\varepsilon,j} = \sqrt{|u_j|^2 + \varepsilon^2}$, $C^\infty$.

On a : $\partial_{x_k} u_{\varepsilon,j} = \dfrac{\bar{u}_j \partial_{x_k} u_j + u_j \partial_{x_k} \bar{u}_j}{2\sqrt{|u_j|^2 + \varepsilon^2}}$ $\forall k \in \{1, \dots, d\}$

$$= \frac{Re(\bar{u}_j \partial_{x_k} u_j)}{2\sqrt{|u_j|^2 + \varepsilon^2}}$$

D'où : $\nabla u_{\varepsilon,j} = \dfrac{Re(\bar{u}_j \nabla u_j)}{2\sqrt{|u_j|^2 + \varepsilon^2}}$

(10) On a $u_{j,\varepsilon} \to u_\varepsilon$ dans $L^2$ donc dans $\mathcal{S}'$

donc $\nabla u_{j,\varepsilon} \to \nabla u_\varepsilon$ dans $\mathcal{S}'$

Or, on a :

$$\left|\nabla u_{j,\varepsilon} - \frac{Re(\bar{u}\nabla u)}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon}}\right| = \left|\frac{Re(\bar{u}_j \nabla u_j)}{\sqrt{|u_j|^2+\varepsilon^2}} - \frac{Re(\bar{u}\nabla u)}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|u_j|^2+\varepsilon^2}}\left|\underbrace{Re(\bar{u}_j \nabla u_j) - Re(\bar{u}\nabla u)}_{A_j} + Re(\bar{u}\nabla u)\left(1 - \frac{\sqrt{|u_j|^2+\varepsilon^2}}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}\right)\right|$$

Or : $|A_j| \leq |(\bar{u}_j - \bar{u})\nabla u_j + \bar{u}(\nabla u_j - \nabla \bar{u})|$

et $\|A_j\|_{L^1} \underset{CS}{\leq} \underbrace{\|\bar{u}_j - \bar{u}\|_{L^2}}_{\downarrow j\to+\infty \ 0} \underbrace{\|\nabla u_j\|_{L^2}}_{\text{borné}} + \underbrace{\|\bar{u}\|_{L^2}}_{\text{borné}} \underbrace{\|\nabla u_j - \nabla u\|_{L^2}}_{\downarrow j\to+\infty \ 0}$

et $\frac{1}{\sqrt{|u_j|+\varepsilon^2}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ borné en $j$.

Puis $\left|Re(\bar{u}\nabla u)\right|\left|1 - \frac{\sqrt{|u_j|^2+\varepsilon^2}}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}\right| = |Re(\bar{u}\nabla u)|\left|\frac{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2} - \sqrt{|u_j|^2+\varepsilon^2}}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}\right|$

$$\leq \underbrace{\frac{|Re(\bar{u}\nabla u)|}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}}_{\leq \underbrace{\frac{|u|}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}}_{\leq 1} |\nabla u| \leq |\nabla u|} \underbrace{\left|\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2} - \sqrt{|u_j|^2+\varepsilon^2}\right|}_{\frac{|u|^2-|u_j|^2}{\sqrt{\ } + \sqrt{\ }} = |u-u_j| \underbrace{\frac{|u+u_j|}{\sqrt{\ }+\sqrt{\ }}}_{\leq 1}}$$

$$\leq |\nabla u| \ |u-u_j| \quad \text{et } \|u-u_j\|_{L^2} \to 0$$

Donc $\left\|\nabla u_{j,\varepsilon} - \frac{Re(\bar{u}\nabla u)}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon}}\right\|_{L^1} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$ donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

(11)

Finalement :

$$\nabla u_{j,\varepsilon} \xrightarrow[j\to+\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} \frac{\mathrm{Re}(\bar{u}\nabla u)}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}$$

et $\nabla u_{j,\varepsilon} \xrightarrow[j\to+\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} \nabla u_\varepsilon$

Donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\nabla u_\varepsilon = \dfrac{\mathrm{Re}(\bar{u}\nabla u)}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}}$

2. Il vient : $|\nabla u_\varepsilon| \leq \dfrac{|u|}{\sqrt{|u|^2+\varepsilon^2}} |\nabla u| \leq \underbrace{|\nabla u|}_{\in L^2 \text{ car } u\in H^1}$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\nabla u_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\mathrm{Re}(\bar{u}(x)\nabla u(x))}{|u(x)|} \mathbb{1}_{\{u(x)\neq 0\}} \leq |\nabla u|$$

Enfin : $\left|\nabla u_\varepsilon - \dfrac{\mathrm{Re}(\bar{u}(x)\nabla u(x))}{|u(x)|}\mathbb{1}_{\{u(x)\neq 0\}}\right| \leq 2|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^d)$

donc par le TCD on a bien que $\nabla u_\varepsilon$ cv, lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, vers $\dfrac{\mathrm{Re}(\bar{u}\nabla u)}{|u|}\mathbb{1}_{\{u(x)\neq 0\}}$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On a : $\langle u_\varepsilon, \varphi\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{(u(x))^2+\varepsilon^2}\,\varphi(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int |u(x)|\varphi(x)\,dx$

par TCD

car $x \mapsto |u(x)|\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par CS.

Donc $u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} |u|$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

D'où : $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \nabla|u|$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

Or $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \dfrac{\mathrm{Re}(\bar{u}\nabla u)}{|u|}\mathbb{1}_{\{u(x)\neq 0\}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

(12) En particulier $\nabla |u| = \frac{Re(\bar{u} \nabla u)}{|u|} \mathbb{1}_{\{u(x) \neq 0\}}$ et $\nabla |u| \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Donc $|u| \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et on a :

$$\|\nabla |u|\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left\| \frac{Re(\bar{u} \nabla u)}{|u|} \mathbb{1}_{\{u(x) \neq 0\}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(11)

## Exercice 6 : Paramétrixe des opérateurs elliptiques.

1. Tout d'abord, comme $p_m$ est homogène : $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, p_m(\lambda\xi) = \lambda^m p_m(\xi)$

- On suppose $\xi = 0$. Alors $|\xi|^m = 0$ et toute constante $C_0 > 0$ convient

  dans $|p_m(\xi)| \geq C_0 \times 0$.

- On peut donc supposer que $\xi \neq 0$. Alors par homogénéité :

$$p_m\left(|\xi|\frac{\xi}{|\xi|}\right) = |\xi|^m p_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \Rightarrow \frac{p_m(\xi)}{|\xi|^m} = p_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right).$$

Or, $\frac{\xi}{|\xi|} \in S^{n-1}$ qui est compacte et $p_m$ est continue sur $S^{n-1}$.

De plus, comme $P$ est elliptique, $p_m$ ne s'annule pas sur $S^{n-1}$.

Donc : $\exists C_0 > 0$ tel que $\left|p_m\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\right| \geq C_0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

soit encore : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}^n, |p_m(\xi)| \geq C_0|\xi|^m.}$

- Puis, pour $\xi \neq 0$, on écrit $p(\xi) = p_m(\xi) + q_{m-1}(\xi) = p_m(\xi)\left(1 + \frac{q_{m-1}(\xi)}{p_m(\xi)}\right)$

Comme $\left|\frac{q_{m-1}(\xi)}{p_m(\xi)}\right| \xrightarrow[|\xi| \to +\infty]{} 0$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\left|1 + \frac{q_{m-1}(\xi)}{p_m(\xi)}\right| \geq \frac{1}{2} \quad \text{pour } |\xi| \geq R.$$

On obtient alors : $\boxed{|p(\xi)| \geq \frac{1}{2}|p_m(\xi)| \geq \frac{C_0}{2}|\xi|^m, \forall \xi, |\xi| \geq R.}$

2. Pour montrer que $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, il suffit de montrer que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Or : - si $|\xi| \leq R$, $v(\xi) = 0$

- si $|\xi| > R$, $v(\xi) = \frac{1}{|p(\xi)|} \leq \frac{2}{C_0}\frac{1}{|\xi|^m} < \frac{2}{C_0}\frac{1}{R^m}$.

Donc $\boxed{v \in L^\infty(\mathbb{R}^n).}$

(12)

- Posons alors $E = \mathcal{F}^{-1}(v)$. On a:

$$\underline{PE} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(PE))$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(p(\xi)\hat{E}(\xi))$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(p(\xi)\hat{v}(\xi))$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(1-\chi(\xi)) \quad \text{avec } \chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$= \mathcal{F}^{-1}(1) + \underbrace{\mathcal{F}^{-1}(-\chi(\xi))}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \quad \text{car } \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$\underline{= \delta_0 + \omega \quad \text{avec } \omega = \mathcal{F}^{-1}(-\chi(\xi)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).}$$

3. On utilise le théorème d'injection de Sobolev. Soit $\beta \in \mathbb{N}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$

- $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))(\xi) = i^{|\beta|}\mathcal{F}(D^\beta(x^\alpha E))(\xi) = i^{|\beta|}\xi^\beta \mathcal{F}(x^\alpha E)(\xi)$

$$= i^{|\beta|}\xi^\beta \left(i\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \hat{E}(\xi)$$
$$= i^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha v(\xi)$$
$$= i^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \left(\frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)}\right)$$

- Alors : · pour $|\xi| \leq R$, $1-\chi(\xi) = 0$ et $\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))(\xi) = 0$.

· pour $|\xi| > R$, $\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))(\xi) = i^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \left(\frac{1}{p(\xi)}\right)$

D'où : pour $|\xi| > R$, $|\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))| \leq C|\xi|^{|\beta|}|\xi|^{-m-|\alpha|}$

En effet, $\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha \left(\frac{1}{p(\xi)}\right)\right| \leq \frac{\tilde{C}}{|p(\xi)||\xi|^{|\alpha|}} \leq C|\xi|^{-m-|\alpha|}$.

- Si $s \in \mathbb{R}$, on a : $\left|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(\partial^\beta(x^\alpha E))\right| \leq C(1+|\xi|^2)^{s/2}|\xi|^{|\beta|-|\alpha|}|\xi|^{-m}$

(13) . Ce majorant est dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si :

$$m-s-|\beta|+|\alpha| > \frac{n}{2} \iff m-|\beta|-|\alpha| > \frac{n}{2}-s.$$

Or, si $s > \frac{n}{2}$, par le théorème d'injection de Sobolev, $\partial^\beta(x^\alpha E)$ est continue. Dès lors que $m-|\beta|+|\alpha|>n$, on a bien $s>\frac{n}{2}$.

Donc, pour $\beta$ fixé, il suffit de prendre $\alpha\in\mathbb{N}^n$ tel que :

$$\boxed{|\alpha| \geq n+|\beta|-m.}$$

- On en déduit que si $k\in\mathbb{N}$ est fixé, alors pour $|\alpha|\geq n+k-m$, $x^\alpha E$ est de classe $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Alors : $E=\frac{1}{x^\alpha}(x^\alpha E)$ est aussi de classe $C^k$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ (pour $|\alpha|\geq n+k-m$)

Cela étant valable pour tout $k$, on en déduit que $\boxed{E\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})}$

4. Soit $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que $Pu=f$.

Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi\equiv 1$ au voisinage de $0$.

On a : $P(\varphi E)=\varphi PE+\psi$ où $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

En effet, par la formule de Leibniz :

$$P(\varphi E)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^\beta\varphi)(\partial^{\alpha-\beta}E)=\varphi PE+\psi$$

$$\text{avec } \psi=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \sum_{0<\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta\varphi\,\partial^{\alpha-\beta}E$$

Or : $PE=\delta_0+\omega$ avec $\omega\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Donc :

Ici, on introduit $\varphi$ comme troncature pour que la convolution soit définie ($f*E$ ne l'est pas a priori).

$P(\varphi E)=\varphi\delta_0+\varphi\omega+\psi$. Or $\varphi\omega+\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Posons $\theta=\varphi\omega+\psi$. On a : $u=u*\delta=u*(P(\varphi E)-\theta)=(Pu)*(\varphi E)-u*\theta$

$$=\underbrace{f*(\varphi E)}_{\in C^\infty \text{ car } f\, C^\infty}-\underbrace{u*\theta}_{\in C^\infty \text{ car } \theta\, C^\infty}\qquad \boxed{\text{Donc } u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)}$$