Feuille de TD 3 : Applications linéaires continues

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme.
Montrer que l'application $T : E \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

est une application linéaire continue. Calculer sa norme.

Exercice 2

On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ et on définit l'application $u : E \to \mathbb{R}$ par $u(f) = f(1)$.
1. On munit E de la norme $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Montrer que u n'est pas continue.
Indication : on pourra utiliser la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ *définie par :* $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sqrt{n}\ x^n$.
2. On munit maintenant E de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

L'application u est-elle continue de E dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes à coefficients complexes muni de la norme définie par :

$$||P|| = \sup_{0\leq k\leq p} |a_k|, \text{ pour } P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k.$$

Soit u l'application de E dans E définie par $u(P) = P'$. Montrer que u n'est pas continue.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}([a,b])$. Soit p une fonction continue sur $[a,b]$. Pour $f \in E$, on pose :

$$\big[\Phi(f)\big](x) = \int_a^x f(t)p(t)\,dt, \qquad \text{pour tout } a \leq x \leq b.$$

1. Définir une norme sur E pour laquelle E est un espace de Banach.
2. Montrer que si f est continue, alors $\Phi(f)$ est continue.
3. Montrer que l'application Φ qui à f associe $\Phi(f)$ est un endomorphisme continu de E. Montrer que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \int_a^b |p(t)|\,dt$.
4. On suppose que $p \geq 0$. Par un choix simple de f, montrer que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b |p(t)|\,dt$.
5. (Dans cette question, on ne suppose pas que $p \geq 0$). On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b],\ f_n(t) = \frac{np(t)}{\sqrt{1+n^2(p(t))^2}}.$$

Montrer que $f_n \in E$. Calculer $||\Phi(f_n)||$. En déduire que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b |p(t)|\,dt$.

Exercice 5

Soit $l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme

$$||u|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|,$$

et soit f l'application de $l^\infty(\mathbb{N})$ dans lui-même définie par $f(u) = v$ où $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que f est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 6

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace normé complet et u une application linéaire continue de E dans lui-même, de norme strictement inférieure à 1. Montrer que $\mathrm{Id}+u$ est inversible et

$$(\mathrm{Id}+u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n.$$

Montrer que l'on a de plus

$$||(\mathrm{Id}+u)^{-1}|| \leq \frac{1}{1-||u||}.$$

Exercice 7

Soit $X = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$. Soit K l'opérateur de X dans X défini par :

$$\forall f \in X,\ \forall x \in [0,1],\ (Kf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que K est une application linéaire et continue de X dans X.
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $K^n = K \circ \cdots \circ K$ composé n fois de K avec lui-même. Montrer par récurrence que K^n est l'application de X dans X qui à f associe la fonction :

$$(K^n f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

3. Montrer que $||K^n||_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{n!}$.
4. Montrer qu'il existe une application linéaire continue de X dans lui-même notée B telle que $B(I-K) = (I-K)B = I$.

Exercice 8

Soit $(E, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé. Soit u un endomorphisme de E vérifiant pour tout $x \in E$, $||u(x)|| \leq ||x||$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = \{0\}$.

3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) = E$.

4. Soit p la projection sur $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} p(x)$.