École Sup Galilée **2018-2019**
Filière MACS1
Analyse

Feuille de TD 4 : Points fixes

Exercice 1
Soient $(E, || \ ||)$ un espace de Banach et soit K un convexe compact de E. Soit $f : K \to K$ qui vérifie

$$\forall (x,y) \in K^2, \ ||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||.$$

Soit $a \in K$. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose :

$$\forall x \in K, \ f_n(x) = f\left(\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right).$$

1. Démontrer que pour chaque $n \geq 1$, f_n admet un unique point fixe noté t_n.
2. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 2
On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ ||(x,y)||_1 = |x| + |y|.$$

On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

1. Démontrer qu'il existe une constante $k \in]0,1[$ telle que, pour tous $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a

$$||f(x,y) - f(x',y')||_1 \leq k||(x,y) - (x',y')||_1.$$

2. En déduire que le système

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\sin(x+y) &= x \\ 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y) &= y \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$.
3. Aurait-on pu utiliser la même méthode en remplaçant la norme $|| \ ||_1$ par la norme $|| \ ||_\infty$?

Exercice 3

Soient E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme, $K \in \mathcal{C}([0,1]^2)$ vérifiant $|K| \leq a < 1$ et l'application de E dans E qui à f associe Kf, définie par

$$\forall x \in [0,1], \ (Kf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

1. Montrer que pour tout $g \in E$, il existe une unique $f_g \in E$ vérifiant l'équation

$$f_g + Kf_g = g.$$

(On pourra montrer que l'application $T : E \to E, \ T(f) = g - Kf$, admet un point fixe).
2. Montrer que la solution f_g est donnée par

$$f_g = \sum_{n \geq 0} (-1)^n K^n g.$$

Exercice 4

Soient $0 \leq \gamma \leq 1$ et $a > 0$. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,a]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ et $x \in [0,a]$, on pose : $Tf(x) = \displaystyle\int_0^x f(\gamma t)\, dt$.
Enfin, pour $f \in E$ on pose $||f|| = \sup\limits_{x \in [0,a]} |f(x)|$.
Alors $(E, || \ ||)$ est un espace de Banach.
1. Montrer que T est une application linéaire continue de E dans E.
2. Montrer que $||T^n||_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{a^n}{n!}$, pour tout $n \geq 1$ entier.
3. En déduire que pour n assez grand T^n est une contraction de E dans E.
4. Montrer que l'équation $f = 1 + T(f)$ admet une solution unique dans E.
5. En déduire que l'équation $y'(x) = y(\gamma x)$ admet sur $[0,a]$ une solution unique telle que $y(0) = 1$. Donner explicitement la solution dans le cas $\gamma = 0$ et dans le cas $\gamma = 1$.