École Sup Galilée **2018-2019**
Filière MACS1
Analyse

Feuille de TD 6 : Séries de Fourier

Exercice 1

Soit f la fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout $x \in [-\pi, \pi]$ par : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$.
1. Déterminer la série de Fourier de f et montrer qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
2. En déduire les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

3. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2

Soit g la fonction 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout $x \in [-\pi, \pi[$ par $g(x) = e^{\alpha x}$, où α est un nombre réel non nul.
1. Déterminer la série de Fourier de g.
2. En déduire l'expression de $S(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$ pour α non nul.
3. Peut-on, à l'aide de cette expression, retrouver $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique de classe C^1 telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

et caractériser l'égalité.

Exercice 4

On considère une barre métallique de longueur L qu'on représente par le segment $[0, L]$. La température à l'instant t au point d'abscisse x est noté $u(x, t)$. On pose $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$. La fonction u est supposée continue sur $\overline{Q}$ et de classe C^∞ sur Q. Elle vérifie en outre les conditions suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ si } (x, t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = h(x) \ \text{ si } \ x \in [0, L] \tag{2}$$

où h est une fonction de classe C^1 sur $[0, L]$ avec $h(0) = h(L) = 0$,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \ \text{ si } t \in [0, +\infty[. \tag{3}$$

1. Montrer que si la fonction u s'écrit sous la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$ (où f et g ne s'annulent pas sur Q) et si u est solution de (1), alors les fonctions f et g vérifient chacune une équation différentielle simple.
2. Résoudre ces équations différentielles en tenant compte de (3). En déduire qu'une fonction qui s'écrit

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

vérifie (1) et (3).
3. Soit $\tilde{h}$ la fonction déduite de h par imparité et $2L$-périodicité. Développer $\tilde{h}$ en série de Fourier. Quelle valeurs donner aux coefficients a_n pour que (2) soit vérifiée?
4. Justifier l'existence d'une fonction u vérifiant les conditions (1), (2) et (3).