MACS 2
2018/2019
Distributions

Correction du devoir maison

①

Exercice 1 :

1. Par la formule des sauts :

$$T_n' = 2t\,\mathbb{1}_{\{t\leq n\}} + \underbrace{(u_n(n^+)-u_n(n^-))}_{=0 \text{ par } C^0 \text{ de } u_n}\delta_n$$
$$= 2t\,\mathbb{1}_{\{t\leq n\}}$$

Puis : $T_n'' = 2\,\mathbb{1}_{\{t\leq n\}} + (u_n'(n^+)-u_n'(n^-))\delta_n + (u_n(n^+)-u_n(n^-))\delta_n'$

$$= 2\,\mathbb{1}_{\{t\leq n\}} - 2n\delta_n$$

Et enfin : $T_n''' = 0 + (u_n''(n^+)-u_n''(n^-))\delta_n + (u_n'(n^+)-u_n'(n^-))\delta_n' + (u_n(n^+)-u_n(n^-))\delta_n''$

$$= -2\delta_n - 2n\delta_n'.$$

On peut aussi directement calculer $\langle T_n^{(p)},\varphi\rangle = (-1)^p\langle T_n,\varphi^{(p)}\rangle$ pour toute $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

2. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$|\langle T_n''',\varphi\rangle| = |-2\varphi(n)+2n\varphi'(n)| \leq 2\|\varphi\|_\infty + 2n\|\varphi'\|_\infty$$

Donc T_n''' est une distribution d'ordre au plus 1.

②

Supposons par l'absurde que T_n''' est d'ordre 0. Alors pour tout compact $K\subset\mathbb{R}$, il existe $C_K>0$, $\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi\subset K$, $|\langle T_n''',\varphi\rangle| \leq C_K\|\varphi\|_\infty$. (*)

Pour $p\geq 1$, on considère $\varphi_p\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi_p\subset[n-\frac{1}{p}, n+\frac{2}{p}]$, $0\leq\varphi_p\leq 1$ et $\varphi_p(n)=1$. Alors $\|\varphi_p\|_\infty = 1$ et

$$\langle T_n''',\varphi_p\rangle = \underbrace{-2\varphi_p(n)}_{\in[-2,0]} + 2n\underbrace{\varphi_p'(n)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

Pour $K=[n-1,n+2]$ compact, on a construit une suite de fonctions test pour lesquelles (*) n'est pas vraie :

$$+\infty \xleftarrow[p\to+\infty]{} |\langle T_n''',\varphi_p\rangle| \leq C_K\|\varphi_p\|_\infty = C_K$$

Donc T_n''' est d'ordre exactement 1.

3. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors :

$\forall n\geq 0 \quad \langle T_n''',\varphi\rangle = -2\varphi(n)+2n\varphi'(n)$

Or, si A est tel que $\operatorname{supp}\varphi\subset[-A,A]$, pour $n>A$ on a $\varphi(n)=\varphi'(n)=0$. Donc : $\forall n>A$, $\langle T_n''',\varphi\rangle=0$

i.e. $\langle T_n''',\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

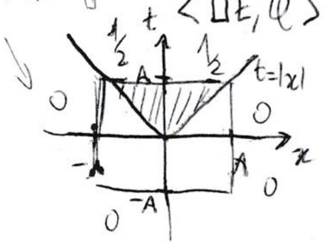
Donc $(T_n''')_{n\geq 0}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

③ <u>Exercice 2 :</u>

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a :

$$\langle \square E, \varphi \rangle = \langle \partial^2_{tt} E, \varphi \rangle - \langle \partial^2_{xx} E, \varphi \rangle$$
$$= (-1)^2 \langle E, \partial^2_{tt}\varphi \rangle - (-1)^2 \langle E, \partial^2_{xx}\varphi \rangle$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} E(x,t)\, \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\, dx\,dt - \iint_{\mathbb{R}^2} E(x,t)\, \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\, dx\,dt$$

Soit $A > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]^2$. Alors :



$$\langle \square E, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\int_0^A \int_x^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\,dt\,dx + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\,dt\,dx$$
$$- \int_0^A \int_{-t}^t \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\int_0^A -\partial_t\varphi(x,x)\,dx + \int_{-A}^0 -\partial_t\varphi(x,-x)\,dx - \int_0^A \partial_x\varphi(t,t) - \partial_x\varphi(t,-t)\,dt \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\int_0^A \partial_t\varphi(u,u)\,du - \int_0^A \partial_x\varphi(u,u)\,du - \int_0^A \partial_t\varphi(-u,u)\,du + \int_0^A \partial_x\varphi(-u,u)\,du \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\int_0^A \phi_1'(u)\,du - \int_0^A \phi_2'(u)\,du \Big]$$ avec $\phi_1(u) = \varphi(u,u)$ et $\phi_2(u) = \varphi(-u,u)$

$$= \frac{1}{2}\big[\phi_1(0) + \phi_2(0) \big] = \varphi(0,0) = \langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle$$

Donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\square E = \delta_{(0,0)}$.

④ <u>Exercice 3 :</u>

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Par les accroissements finis :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right) \right) \|\varphi'\|_\infty$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{3/2}} \right) \|\varphi'\|_\infty.$$

Donc T, qui est clairement linéaire, est une distribution d'ordre au plus 1 sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons par l'absurde que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ il existe $C_K > 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_\infty$$ i.e. T est d'ordre 0.

Pour $K = [0,2]$ et $n \geq 1$ on a alors :

$$\langle T, \psi_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \Big(\psi_n\big(\tfrac{1}{k}\big) - \underbrace{\psi_n\big(-\tfrac{1}{k}\big)}_{=0} \Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \times 1$$

et $\displaystyle \Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Big| \leq C_{[0,2]} \underbrace{\|\psi_n\|_\infty}_{=1} = C_{[0,2]}$, $\forall n \geq 1$

Or $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où une contradiction.

Donc T n'est pas d'ordre 0, elle est donc d'ordre exactement 1.

(5) 3. Soit $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{k}, k\in\mathbb{Z}, k\neq 0\}$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus K)$. Alors : $\langle T,\varphi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}(0-0)=0$

Donc $\mathbb{R}\setminus K \subset (\operatorname{supp} T)^c$ et $\operatorname{supp} T \subset K$.

Réciproquement, soit $k_0\in\mathbb{Z}$, $k_0\neq 0$. Soit $\varepsilon\in]0,1[$ et soit φ fonction pic sur $]\frac{1}{k_0}-\varepsilon, \frac{1}{k_0}+\varepsilon[$ avec $\varphi(\frac{1}{k_0})=1$.

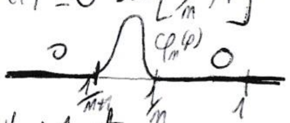
Alors $\langle T,\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{k_0}}\varphi(\frac{1}{k_0}) = \frac{1}{\sqrt{k_0}}\neq 0$. D'où $\frac{1}{k} \in \operatorname{supp} T$

Donc $\{\frac{1}{k} : k\in\mathbb{Z} \text{ et } k\neq 0\} \subset \operatorname{supp}T \subset \{0\}\cup\{\frac{1}{k} : k\in\mathbb{Z}, k\neq 0\}$

Comme supp T est un fermé, obligatoirement,

$\operatorname{supp}T = \{0\} \cup \{\frac{1}{k} : k\in\mathbb{Z}, k\neq 0\}$

4. On a : $\forall p\geq 1$, $\varphi_n^{(p)}(t) = n^{-3/2}\psi_n^{(p)}(t) \equiv 0$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et sur $\mathbb{R}\setminus[\frac{1}{n+1},2]$.



En particulier $\varphi_n^{(p)}(0)=0$, $\forall n\geq 1$ et $\forall n\geq 1, \forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\varphi_n^{(p)}(\frac{1}{k})=0$

Donc pour tout $p\geq 1$, $\varphi_n^{(p)}$ converge uniformément sur supp T vers 0. Par ailleurs :

$\forall n\geq 1$, $\langle T,\varphi_n\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} n^{-3/2}(1-0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{k}}$

$= n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{n}{k}}\right)$. Or $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n}{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

(somme de Riemann)

donc $\langle T,\varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

5. Supposons par l'absurde qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ et $C_k>0$,

$\forall n\geq 1$, $\langle T,\varphi_n\rangle \leq C_k \max_{p\leq k}\max_{x\in\operatorname{supp}T} |\varphi_n^{(p)}(x)|$.

Or $\max_{p\leq k}\max_{x\in \operatorname{supp}T}|\varphi_n^{(p)}(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par 4.

(pour $p=0$ il est clair que $\varphi_n\to 0$ uniformément sur supp T grâce au $n^{-3/2}$

Comme $\langle T,\varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ on aboutit à une contradiction.

Toutefois cela ne contredit en rien la continuité de T en 0 car (φ_n) ne converge pas vers 0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

En effet le compact qui contient tous les supp φ_n n'est autre que $[0,2]$ et sur cet intervalle, les $\varphi_n^{(p)}$ n'ont aucune raison de converger uniformément vers 0.

En effet, sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ de longueur $\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$ la pente de φ_n est de l'ordre de n^2 et $n^{-3/2}$ ne suffit pas à compenser cela. Il se trouve que supp T ne "voit" pas ce qu'il se passe sur ce petit intervalle et c'est pour cela que la cvu a quand même lieu sur supp T.