École Sup Galilée **2018-2019**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Feuille de TD 3.

Rappels

Exercice 1

Calculer le support des distributions suivantes. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx,$$

$$< S, \varphi >= \int_0^\infty \varphi'(x) \log(x) dx,$$

$$< V, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x)) dx,$$

(où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un C^1-difféormorphisme).
Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$< U, \varphi >= \int_0^\infty (\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)) dt.$$

Exercice 2

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.

a. Calculer T_1 et T_2.

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.

d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.

3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

Convolution des distributions

Exercice 3

1. Calculer $\delta_0' \star \delta_0'$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, à support compact, telle que $E \star T = T^{(k)}$.

3. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T \star S) = \sum_{k=0}^n C_n^k (X^k T) \star (X^{n-k} S).$$

Exercice 4
Calculer les produits de convolution $\delta' * 1$ et $\delta' * H$. Calculer ensuite $(1 * \delta') * H$ et $1 * (\delta' * H)$. Qu'est-ce qu'on peut remarquer ?

Exercice 5 - Équation de la chaleur

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \partial_{xx}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x,t)\ \mathrm{d}t \mathrm{d}x,$$

et

$$J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\ \mathrm{d}t \mathrm{d}x.$$

a. Calculer $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

b. En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, déterminer la limite, lorsque ε tend vers 0, de $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.
Indication : on pourra utiliser que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}}\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Calculer $(\partial_t - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

5. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.