École Sup Galilée **2018-2019**
Filière MACS2
Théorie des distributions

Feuille de TD 4.

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)$.
1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |P(x)|$.
2. Montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ est convergente.
3. Montrer que S définie par : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ < S, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$, est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2
Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $u' + u = \delta_0$. Quelles en sont les solutions tempérées ?

Exercice 3 - Transformée de Fourier de la gaussienne
Soit $a > 0$ un réel. On considère la fonction gaussienne $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-ax^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
1. A l'aide du théorème de Fubini et d'un changement de variables en polaires, calculer $(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x)^2$.
2. Montrer que la transformée de Fourier de f, $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{\xi}{2a}y = 0$. Donner la solution générale de cette équation différentielle.
3. A l'aide de la question 1, déterminer $\hat{f}$.

Exercice 4
Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ associées aux fonctions suivantes :

$$1.\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\ (a \in \mathbb{R}), \quad 2.\ \cos(x), \quad 3.\ x\sin(x), \quad 4.\ \frac{\sin(x)}{x}$$

$$5.\ \mathrm{e}^{-a|x|}\ (a > 0), \quad 6.\ |x|\mathrm{e}^{-a|x|}\ (a > 0), \quad 7.\ \sin(|x|).$$

Exercice 5
On note $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution *valeur principale* sur $\mathbb{R}$. On note aussi H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$.
1. Montrer que $xT = 1$ au sens des distributions.
2. En appliquant la transformée de Fourier à l'égalité $xT = 1$, montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\widehat{T} = -2\mathrm{i}\pi H + C.$$

3. Soit $\check{T}$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < \check{T}, \varphi >=< T, \check{\varphi} >,$$

où : $\forall x \in \mathbb{R},\ \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Justifier que $\check{T} = -T$ (on rappelle qu'ici $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$). En déduire que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $< \widehat{T}, \check{\varphi} >=< -\widehat{T}, \varphi >$.
4. Déduire de la question précédente la valeur de la constante C obtenue à la question 2.
5. En utilisant ce qui précède et le fait que $\check{T} = -T$, calculer $\widehat{H}$.

Exercice 6 - Distributions harmoniques
Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $\Delta T = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{supp}(\widehat{T}) \subset \{0\}$.
2. Conclure que les seules fonctions u de classe C^2 telles que $\Delta u = 0$ et u est à croissance modérée sont polynômiales.

Exercice 7 - Principe d'incertitude de Heisenberg
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de norme $||f||_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. On veut montrer l'inégalité suivante :

$$(1) := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2|\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right) \geq \frac{1}{4}.$$

1. En utilisant la relation $\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi)$, montrer que

$$(1) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2\mathrm{d}x\right).$$

2. En déduire que $(1) \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2$.
3. Justifier que pour deux nombres complexes a et b, on a $|ab| \geq \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|f(x)|^2 = f(x)\overline{f'(x)} + \overline{f(x)}f'(x)$.
4. Déduire l'inégalité recherchée des questions 2 et 3. Interprétez cette inégalité en termes probabilistes.

Exercice 8
Soit $P(\xi)$ un polynôme dans $\mathbb{R}^n$ non identiquement nul. On note $P(D)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants associé. Montrer que si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P(D)u = 0$, alors $u = 0$.

Exercice 9
On notera dans ce qui suit δ_a la distribution de Dirac au point a. On définit par récurrence la suite de distributions $(T_k)_{k\geq 1}$ par :

$$T_1 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \text{ et } \forall k \geq 2,\ T_k = T_{k-1} \star T_1.$$

1. Écrire T_k comme combinaison linéaire finie de distributions à supports ponctuels.
2. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{T}_k$ de la distribution à support compact T_k.
3. Pour $k \geq 1$, on pose $f_k(\xi) = \widehat{T}_k\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.
4. On note g_k la distribution dont f_k est la transformée de Fourier. Montrer que la suite $(g_k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.
Indication : On pourra utiliser le fait que, pour $a > 0$, $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-ax^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.