Mathématiques M1
Analyse Fonctionnelle
2019/2020

Correction Devoir Maison

① **Problème 1:**

1. $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\ \|_\infty)$ est un evn de dimension infinie car la famille $\{(1,0,\dots),(0,1,0,\dots),(0,0,1,0,\dots),\dots\}$ y est incluse et libre. Donc par le théorème de Riesz sa boule unité n'est pas compacte.

2. (a) • K est un borné de $\mathbb{R}$ car $K\subset[0,1]$.
• K est fermé dans $\mathbb{R}$ car si (x_n) est une suite d'éléments de K qui converge vers $x_0\in\mathbb{R}$ alors soit (x_n) stationne apcr vers x_0 et $x_0=\frac{1}{n_0}\in K$ soit $x_0=0\in K$. On a aussi : $K=\overline{\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}}$.

Donc K est un compact de $\mathbb{R}$.

(b)(i) Montrons tout d'abord que $G\subset C(K,\mathbb{R})$. Soit $f\in G$. Soit $x_0\in K$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $x_0\in K$.

• Si $x_0=0$: comme $\forall n\in\mathbb{N}, |f(x_n)|\leq x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0=f(0)$ (car $|f(0)|\leq 0$) donc f est C^0 en x_0.

• Si $x_0=\frac{1}{n_0}$ avec $n_0\geq 1$: comme $\frac{1}{n_0}$ est un point isolé de K, (x_n) stationne à $\frac{1}{n_0}$ à partir d'un certain rang. Alors $(f(x_n))$ stationne à $f(\frac{1}{n_0})=f(x_0)$ apcr. et $f(x_n)\underset{n\to+\infty}{\to} f(x_0)$. Là encore f est C^0 en x_0. Donc $f\in C(K,\mathbb{R})$

(ii) Soit (f_n) une suite d'éléments de G qui converge vers f pour $\|\ \|_K$. Alors : $\|f_n-f\|_K\underset{n\to\infty}{\to}0$ et si $x\in K$:

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\sup_{y\in K}|f_n(y)-f(y)|=\|f_n-f\|_K\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Donc (f_n) CVS vers f sur K. Alors :

$\forall x\in K$, $|f_n(x)|\leq x$ et en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$: $\forall x\in K, |f(x)|\leq x$. i.e. $f\in G$.

Donc G est fermé dans $C(K,\mathbb{R})$ pour $\|\ \|_K$.

(c) Soient $u,v\in F$. On a :

$$\|T(u)-T(v)\|_K=\sup_{x\in K}|T(u)(x)-T(v)(x)|=\max\left(0,\sup_{n\geq1}\left|T(u)\left(\tfrac{1}{n}\right)-T(v)\left(\tfrac{1}{n}\right)\right|\right)$$
$$=\sup_{n\geq1}|u_n-v_n|=\|u-v\|_\infty.$$

Donc T est une isométrie de $(F,\|\ \|_\infty)$ dans $(G,\|\ \|_K)$.
En particulier T est C^0. De plus T est bijective de bijection réciproque : $T^{-1}: \begin{array}{l} G\to F \\ f\mapsto (0,f(1),f(\frac{1}{2}),\dots,f(\frac{1}{n}),\dots)\end{array}$

qui est bien définie car si $f\in G$, pour tout $n\geq1$, $|f(\frac{1}{n})|\leq\frac{1}{n}$ et $T^{-1}(f)\in F$. On a alors pour $f,g\in G$,

$$\|T^{-1}(f)-T^{-1}(g)\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left|f\left(\tfrac{1}{n}\right)-g\left(\tfrac{1}{n}\right)\right|\overset{\text{car } f(0)=g(0)=0}{=}\sup_{x\in K}|f(x)-g(x)|=\|f-g\|_K.$$

② Donc T^{-1} est aussi une isométrie et en particulier T^{-1} est C^0.

Donc T est un homéomorphisme de $(F, \|\ \|_\infty)$ dans $(G, \|\ \|_k)$.

(d) Si F est compacte, $T(F)$ l'est aussi comme image C^0 d'un compact et par surjectivité de T, $T(F)=G$.

Si G est compacte, $T^{-1}(G)$ l'est aussi comme image C^0 d'un compact et par surjectivité de T^{-1}, $T^{-1}(G)=F$.

3. (a) Soit $x \in K$. Soit $f \in G$. Alors $|f(x)| \leq x (\leq 1)$

Donc $\{f(x) \mid f \in G\}$ est bornée par x (et même par 1).

(b) On veut montrer que:

$\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in G, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

- Si $x \in \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x = \frac{1}{k}$, $k \geq 1$ et si $\delta = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right| = \frac{1}{2k(k+1)} > 0$ alors pour tout $y \in K$,

$|x-y| < \delta \Rightarrow x = y$ et ainsi $|f(x) - f(y)| = 0$.

- Si $x = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta = \varepsilon$. Alors:

$\forall y \in K$, $|x-y| = |y| \leq \varepsilon$ et :

$\forall f \in G$, $|f(x) - f(y)| \underset{\text{car } f(0)=0}{=} |f(y)| \leq y \leq \varepsilon$.

Donc G est équicontinue.

(c) Par le théorème d'Ascoli, $\overline{G}$ est compacte. Or G est fermé donc G est compacte et F l'est aussi par 3(d).

Problème 2 :

1. (a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers f dans $L^\infty(X, \mu)$. Alors $\forall n$, $\|f_n - f\|_{L^p}^p = \int_X |f_n(x) - f(x)|^p dx$

car pour μ-p.t $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{L^\infty}$ $\rightarrow \leq \int_X \|f_n - f\|_{L^\infty}^p dx$

$= \|f_n - f\|_{L^\infty}^p \mu(X)$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_{L^p} \leq (\mu(X))^{1/p} \|f_n - f\|_{L^\infty} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(X, \mu)$. Or F est fermé dans $L^p(X,\mu)$ donc $f \in F$. Donc F est aussi fermé dans $L^\infty(X, \mu)$.

(b) L'application $Id : \begin{array}{l} (F, \|\ \|_{L^\infty}) \to (F, \|\ \|_{L^p}) \\ f \longmapsto f \end{array}$ est linéaire, bijective et C^0 car on vient de montrer que :

$\forall f \in F$, $\|f\|_{L^p} \leq (\mu(X))^{1/p} \|f\|_{L^\infty}$.

De plus, $(F, \|\ \|_\infty)$ et $(F, \|\ \|_{L^p})$ sont deux espaces de Banach puisque F est fermé dans les espaces de Banach $(L^\infty, \|\ \|_{L^\infty})$ et $(L^p, \|\ \|_{L^p})$. On peut donc appliquer le théorème de l'isomorphisme de Banach pour obtenir que

③ $Id^{-1} : (F, \| \|_{L^p}) \longrightarrow (F, \| \|_{L^\infty})$, $f \longmapsto f$ est elle aussi C^0. Donc, il existe $C > 0$ tel que : $\forall f \in F$, $\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^p}$.

2. Supposons que $p < 2$. Alors $2-p > 0$ et si $f \in F$, par l'inégalité de Hölder appliquée à $\left(\frac{2}{p}, \frac{2}{2-p}\right)$:

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f(x)|^p d\mu = \int_X |f(x)|^p \times 1 \, d\mu$$
$$\leq \left(\int_X (|f(x)|^p)^{2/p}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_X 1^{\frac{2}{2-p}} d\mu\right)^{\frac{2-p}{2}}$$
$$= \|f\|_{L^2}^p \left(\mu(X)\right)^{\frac{2-p}{2}}$$

D'où : $\forall f \in F$, $\|f\|_{L^p} \leq \underbrace{(\mu(X))^{\frac{2-p}{2p}}}_{\tilde{B}_1 \geq 0} \|f\|_{L^2}$

Et si $p=2$, l'inégalité est évidente avec comme constante 1.

Posons $B_1 = \max(\tilde{B}_1, 1) > 0$. Alors :

$$\forall f \in F, \quad \|f\|_{L^p} \leq B_1 \|f\|_{L^2}.$$

3. Supposons que $p > 2$. Alors $p-2 > 0$

(a) Soit $f \in F$. On a : $\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f(x)|^p d\mu$

$$= \int_X |f(x)|^{p-2} |f(x)|^2 d\mu$$
$$\leq \int_X \|f\|_{L^\infty}^{p-2} |f(x)|^2 d\mu = \|f\|_{L^\infty}^{p-2} \|f\|_{L^2}^2$$

D'où : $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2}^{2/p} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-2}{p}}$.

(b) Soit $f \in F$. Par 3.(a) et 1(b) :

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2}^{2/p} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-2}{p}} \leq C^{\frac{p-2}{p}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p-2}{p}} \|f\|_{L^2}^{2/p}$$

Si $f = 0$ alors l'inégalité voulue est vérifiée. On peut donc supposer $f \neq 0$ et $\|f\|_{L^p} \neq 0$. Alors :

$$\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p-2}{p}} \leq C^{\frac{p-2}{p}} \|f\|_{L^2}^{2/p} \iff \|f\|_{L^p}^{2/p} \leq C^{\frac{p-2}{p}} \|f\|_{L^2}^{2/p}$$

D'où : $\|f\|_{L^p} \leq C^{\frac{p-2}{2}} \|f\|_{L^2}$ et le résultat avec $B_2 = C^{\frac{p-2}{2}}$.

4. Soit $B = C \max(B_1, B_2)$. Alors par 1(b), 2 et 3(b) on a :

$$\forall p \in [1, +\infty[, \ \forall f \in F, \ \|f\|_{L^\infty} \leq B \|f\|_{L^2}.$$

5. (a). Soit $(c_1, \ldots, c_N) \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^N$. Alors, par définition de $\| \|_{L^\infty}$, il existe $N_{(c_1, \ldots, c_N)} \subset X$, $\mu(N_{(c_1, \ldots, c_N)}) = 0$ et

$$\forall x \in X \setminus N_{(c_1, \ldots, c_N)}, \ \left|\sum_{j=1}^N c_j e_j(x)\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^N c_j e_j\right\|_{L^\infty}.$$

Puisque $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^N$ est dénombrable, si $N = \bigcup_{(c_1, \ldots, c_N) \in (\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^N} N_{(c_1, \ldots, c_N)}$, $\mu(N) = 0$ et :

$$\forall x \in X \setminus N, \ \forall (c_1, \ldots, c_N) \in (\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^N, \ \left|\sum_{j=1}^N c_j e_j(x)\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^N c_j e_j\right\|_{L^\infty}$$

Par C^0 des deux membres de cette inégalité en les c_j, et par densité de $(\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^N$ dans $\mathbb{C}^N$, on obtient :

$$\forall x \in X \setminus N, \ \forall (c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{C}^N, \ \left|\sum_{j=1}^N c_j e_j(x)\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^N c_j e_j\right\|_{L^\infty}$$

4 (b) Par 5(a) et 4., il vient :

$\forall x \in X \setminus N, \forall (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N,$

$$\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x)\right|^2 \leq \left\|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j\right\|_{L^\infty}^2 \leq B^2 \left\|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j\right\|^2$$

Or, $(e_1, \dots, e_N)$ étant orthonormé, par le théorème de Pythagore,

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j\right\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \|c_j e_j\|^2 = \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \underbrace{\|e_j\|^2}_{=1} = \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2$$

D'où : $\forall x \in X \setminus \mathcal{N}, \forall (c_1, \dots, c_N) \in \mathbb{C}^N,$

$$\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x)\right| \leq B\left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\right)^{1/2}$$

(c) Soit $x \in X \setminus N$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, N\}$ on pose $c_j = \overline{e_j(x)}$. Alors, par 5(b) :

$$\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x)\right| = \sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2 \leq B\left(\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2\right)^{1/2}$$

Si $\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2 \neq 0$ alors : $\left(\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2\right)^{1/2} \leq B$.

D'où le résultat voulu en élevant au carré.

Si $\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2 = 0$, l'inégalité voulue est vérifiée.

(d) On intègre sur X l'inégalité obtenue en 5(c) :

$$\int_X \left(\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2\right) d\mu \leq \int_X B^2 d\mu$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\|e_j\|_{L^2}^2}_{=1} \leq B^2 \mu(X)$$

$$\Leftrightarrow N \leq B^2 \mu(X).$$

6. Si par l'absurde F est de dimension infinie, on peut construire par orthonormalisation de Gram-Schmidt une famille orthonormée dans F de taille $N \geq B^2 \mu(X) + 1$, ce qui contredit l'inégalité obtenue en 5(d).

Donc F est de dimension finie, ~~et~~ on a :

$$\dim F \leq B^2 \mu(X).$$