~~AF~~ – Fonda
M1
2019/2020

TD2 : Opérateurs bornés et compacts

1

Exercice 1 :

Si $T_n \rightharpoonup T_\infty$ alors : $\forall u, v \in H$, $\langle T_n u | v \rangle \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle Tu | v \rangle$

Soient $u, v \in H$. On a :

$\forall n \geq 0$, $\langle T_n^* u | v \rangle = \langle u | T_n v \rangle = \overline{\langle T_n v | u \rangle}$

$\underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \overline{\langle T v | u \rangle} = \langle u | T v \rangle = \langle T^* u | v \rangle$.

Donc $T_n^* \rightharpoonup T^*$.

Exercice 2 :

On a : $\Gamma(T^*) = \{ (u, T^* u) \mid u \in H \}$.

On a : $(v, w) \in (R(\Gamma(T)))^\perp$

$\Leftrightarrow \forall u \in H, \ ((v,w) \mid R(u, Tu)) = 0$.

$\Leftrightarrow \forall u \in H, \ ((v,w) \mid (-Tu \mid u)) = 0$

$\Leftrightarrow \forall u \in H, \ -(v \mid Tu) + (w \mid u) = 0$

$\Leftrightarrow \forall u \in H, \ (w \mid u) = (v \mid Tu) = (T^* v \mid u)$

$\Leftrightarrow w = T^* v$.

Donc $(v, w) \in (R(\Gamma(T)))^\perp \Leftrightarrow w = T^* v$ i.e. $(v, w) \in \Gamma(T^*)$.

②

Exercice 3 :

Précisons tout d'abord l'énoncé incomplet :

Définition : Soient $(H_1, (\cdot|\cdot)_{H_1})$ et $(H_2, (\cdot|\cdot)_{H_2})$ deux espaces de Hilbert.

(i) Un homomorphisme de H_1 dans H_2 est une application linéaire $U : H_1 \to H_2$ telle que : $\forall x, y \in H_1$, $(u(x)|u(y))_{H_2} = (x|y)_{H_1}$.

(ii) Un tel homomorphisme est un isomorphisme s'il existe un homomorphisme réciproque, i.e. une application linéaire $v : H_2 \to H_1$ telle que : $\forall x', y' \in H_2$, $(v(x')|v(y'))_{H_1} = (x'|y')_{H_2}$ et $v \circ u = Id_{H_1}$ et $u \circ v = Id_{H_2}$.

Correction : $\Rightarrow$] Supposons que $U : H_1 \to H_2$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Alors $U^{-1} : H_2 \to H_1$ est bien défini et est un homomorphisme d'espaces de Hilbert.

On a : $\forall z \in H_2, \exists! y \in H_1, z = Uy$. Alors :

$$\forall x \in H_1, \forall z \in H_2, \quad (Ux|z)_{H_2} = (Ux|Uy)_{H_2} = (x|y)_{H_1}$$

Par ailleurs : $\forall x \in H_1, \forall z \in H_2$, $(Ux|z)_{H_2} = (Ux|Uy)_{H_2} = (x|U^*Uy)_{H_1}$

D'où : $\forall x, y \in H_1$, $(x|y)_{H_1} = (x|U^*Uy)_{H_1}$ et $y = U^*Uy$.

D'où : $U^*U = Id_{H_1}$.

Puis : $\forall z \in H_1, \exists! y \in H_2, z = U^{-1}y$. Alors :

$\forall x \in H_2, \forall z \in H_1, (U^{-1}x|z)_{H_1} = (U^{-1}x|U^{-1}y)_{H_1} = (x|y)_{H_2}$

2bis

Mais : $\forall x \in H_2, \forall z \in H_1, (U^{-1}x|z)_{H_1} = (U^{-1}x|U^{-1}y)_{H_1} = (x|(U^{-1})^* U^{-1}y)_{H_1}$

Donc : $\forall y \in H_2, \ y = (U^{-1})^* U^{-1} y$

Or $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$ et : $\forall y \in H_2, y = (U^*)^{-1} U^{-1} y = (UU^*)^{-1} y$

D'où : $(UU^*)^{-1} = Id_{H_2} \Rightarrow UU^* = Id_{H_2}$.

On a donc : $U^*U = Id_{H_1}$ et $UU^* = Id_{H_2}$.

Donc $\underline{U^{-1} = U^*}$.

$\Leftarrow$ Réciproquement si $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible et $U^{-1} = U^*$

alors : $\forall x, y \in H_1, (Ux|Uy)_{H_2} = (x|\underbrace{U^*U}_{=Id_{H_1}}y)_{H_1} = (x|y)_{H_1}$.

Donc U est un homomorphisme d'espace de Hilbert.

De plus : $\forall x', y' \in H_2, (U^{-1}x'|U^{-1}y')_{H_1} = (x'|(U^{-1})^* U^{-1}y')_{H_2}$

$= (x'|(U^*)^{-1}U^{-1}y')_{H_2}$

$= (x'|(UU^*)^{-1}y')_{H_2}$

$= (x'|(Id_{H_2})^{-1}y')_{H_2}$

$= (x'|y')_{H_2}$.

Donc U^{-1} est aussi un homomorphisme d'espaces de Hilbert. Donc U est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

③ Exercice 4 :

1. Si $u \in L^2(X)$, $\int_X \left| \underbrace{\int_X k(x,y) u(y)\, dy} \right|^2 dx = \| T_k u \|^2_{L^2(X)}$

$$\underset{CS}{\leq} \left(\int_X |k(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_X |u(y)|^2 dy\right)$$

Donc : $\int_X \left| \int_X k(x,y) u(y)\, dy \right|^2 dx \leq \int_X \left(\int_X |k(x,y)|^2 dy\right)\left(\int_X |u(y)|^2 dy\right) dx$

$$= \|u\|^2_{L^2(X)} \int_X \int_X |k(x,y)|^2 dy\, dx$$

$$= \|u\|^2_{L^2(X)} \|k\|^2_{L^2(X\times X)}$$

En particulier, $T_k u \in L^2(X)$, donc $T_k : L^2(X) \to L^2(X)$ est bien défini et linéaire.

2. On a : $\forall u \in L^2(X)$,

$$\|T_k u\|_{L^2(X)} \leq \|k\|_{L^2(X\times X)} \|u\|_{L^2(X)}$$

donc T_k est C^0 et $\|T_k\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|k\|_{L^2(X\times X)}$

3. Soient $u, v \in L^2(X)$. On a :

$$(Tu \mid v) = \int_X \left(\int_X k(x,y) u(y)\, dy\right) \overline{v(x)}\, dx$$

Fubini

$$= \int_X \int_X k(x,y) u(y) \overline{v(x)}\, dx\, dy$$

$$= \int_X u(y) \left(\int_X k(x,y) \overline{v(x)}\, dx\right) dy$$

$$= (u \mid T^* v) \quad \text{avec } \overline{T^* v(y) = \int_X k(x,y) \overline{v(x)}\, dx}$$

④

Mais : $\overline{\int_X K(x,y)\,\overline{v(x)}\,dx} = \int_X \overline{K(x,y)}\,v(x)\,dx$

Donc, on pose $\forall u \in H$: $\forall x \in X, T_K^* u(x) = \int_X \overline{K(y,x)}\,u(y)\,dy$

et $T_K^* = T_{K^*}$ avec : $\forall x,y \in X, K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

(analogue à $A^* = {}^t\bar{A}$).

Exercice 5 :

- On a : $\forall u, v \in L^2([0,2],\mathbb{C}), (Tu|v) = \int_0^2 x\,u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$

$= \int_0^2 u(x)\,\overline{(x\,v(x))}\,dx = (u|Tv)$

Donc $T = T^*$ car T est borné. En effet :

$\forall u \in L^2([0,2],\mathbb{R})$, $\|Tu\|^2_{L^2([0,2],\mathbb{C})} = \int_0^2 |x\,u(x)|^2\,dx$

$\leq 4\,\|u\|^2_{L^2([0,2],\mathbb{C})}$

D'où T est borné et $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2([0,2]))} \leq 2$.

- Supposons par l'absurde que T est compact

Alors, soit $(I-T)^{-1}$ existe et est borné, soit $Tu=u$ possède une solution non identiquement nulle.

* Or : $Tu = u \Leftrightarrow \forall x \in [0,2], x\,u(x) = u(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0,2], (x-1)\,u(x) = 0$

Alors : $\forall x \in [0,2]\setminus\{1\}, u(x) = 0$ et $u = 0$ dans $L^2([0,2])$.

Donc $Tu=u$ ne possède pas de solution non nulle dans $L^2([0,2])$.

5

Donc $(I-T)^{-1}$ existe et est borné.

On : $\forall u, v \in L^2([0,2]), (I-T)^{-1} v = u \iff v = (I-T)u$

$\iff \forall x \in [0,2] \ , \ v(x) = u(x) - x\,u(x) = (1-x)u(x)$.

i.e. $\forall x \in [0,2] \setminus \{1\}, \ u(x) = \frac{1}{1-x} v(x)$

et $(I-T)^{-1}(v)(x) = \frac{1}{1-x} v(x)$

Mais, $(I-T)^{-1}$ ainsi définie, n'est pas bornée. En effet,

si $v \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}$ sur $[0,2]$, $\left\| \frac{1}{1-x} v \right\|_{L^2} = \int_0^2 \left| \frac{1}{1-x} \right|^2 dx = +\infty$.

alors que $\|v\|_{L^2} = 1$.

Donc T ne vérifie pas l'alternative de Fredholm, donc T n'est pas compact.

<u>Exercice 6:</u>

Comme U est unitaire : $UU^* = U^*U = I$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(U-I)$: $Ux = x$ Alors $\underbrace{U^*Ux}_{x} = U^*x$

Donc $U^*x = x$ et $x \in \mathrm{Ker}(U^*-I)$.

De même si $x \in \mathrm{Ker}(U^*-I)$ $U^*x = x$ et $UU^*x = Ux = x$

donc $x \in \mathrm{Ker}(U-I)$.

Donc $\mathrm{Ker}(U-I) = \mathrm{Ker}(U^*-I)$.

On : $\mathrm{Ker}(U^*-I) = \mathrm{Ker}((U-I)^*) = (\mathrm{Im}(U-I))^\perp$

Finalement : $\mathrm{Ker}(U-I) = (\mathrm{Im}(U-I))^\perp$

et $(\mathrm{Ker}(U-I))^\perp = ((\mathrm{Im}(U-I))^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(U-I)}$

(6) Comme $U-I$ est C^0, $\mathrm{Ker}(U-I)$ est un sev fermé de H donc
$$H = \mathrm{Ker}(U-I) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Ker}(U-I))^{\perp}$$
$$= \mathrm{Ker}(U-I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}(U-I)}$$

2. Soit $u \in H$. Alors $u = x+y$ avec $x \in \mathrm{Ker}(U-I)$ et $y \in \overline{\mathrm{Im}(U-I)}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n u = S_n x + S_n y$.

- Mais : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n x = \frac{1}{n+1}(x + Ux + \dots + U^n x)$

avec $Ux = x$ car $x \in \mathrm{Ker}(U-I)$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n x = \frac{1}{n+1}(x + x + \dots + x) = \frac{n+1}{n+1} x = x$.

- D'autre part comme $y \in \overline{\mathrm{Im}(U-I)}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in \mathrm{Im}(U-I)$ tel que $\|y - y_\varepsilon\|_H \leq \varepsilon$.

Mais, puisque $y_\varepsilon \in \mathrm{Im}(U-I)$, il existe $z_\varepsilon \in H$,
$$y_\varepsilon = U z_\varepsilon - z_\varepsilon.$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|S_n y\|_H = \|S_n(y - y_\varepsilon) + S_n y_\varepsilon\|_H \leq \|S_n\|_{\mathcal{L}(H)} \|y - y_\varepsilon\|_H + \|S_n y_\varepsilon\|_H$

Mais : $\|S_n\|_{\mathcal{L}(H)} = \left\| \frac{1}{n+1}(I + U + \dots + U^n \right\|_{\mathcal{L}(H)}$
$$\leq \frac{1}{n+1}\left(\|I\|_{\mathcal{L}(H)} + \|U\|_{\mathcal{L}(H)} + \dots + \|U\|^n_{\mathcal{L}(H)} \right)$$

et $\|U\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$ et $\|I\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$ donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\|S_n\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1$.

7

Alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ \|S_n y\|_{\mathcal{H}} \leq 1\times\varepsilon + \|S_n y_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}$.

Puis : $\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n y_\varepsilon = \left(\frac{1}{n+1}(I+\dots+U^n)\right)(Uz_\varepsilon - z_\varepsilon)$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\cancel{Uz_\varepsilon} - z_\varepsilon + \cancel{U^2 z_\varepsilon} - \cancel{Uz_\varepsilon} + \cancel{\dots} + U^{n+1}z_\varepsilon - \cancel{U^n z_\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(U^{n+1}z_\varepsilon - z_\varepsilon\right)$$

et : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \|S_n y_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{n+1}\left(\underbrace{\|U\|^{n+1}_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}}_{\leq 1}\|z_\varepsilon\|_{\mathcal{H}} + \|z_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}\right)$

$$\leq \frac{2\|z_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}}{n+1}.$$

Pour n assez grand, i.e. $\exists N_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N_0,\ \|S_n y_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}\leq\varepsilon$.

Donc : $\forall n\geq N_0,\quad \|S_n y\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$

Donc : $S_n y \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Finalement : $S_n u \xrightarrow[n\to+\infty]{} x = Pu$

Exercice 7 : (Trace d'un opérateur positif)

1. Soit $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une autre base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Alors :

$$\mathrm{tr}_e\, T = \sum_{n=0}^{\infty}(Te_n|e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}(T^{1/2}T^{1/2}e_n|e_n)$$

$T^{1/2}$ a-a

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(T^{1/2}e_n|T^{1/2}e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\|T^{1/2}e_n\|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}|(T^{1/2}e_n|f_m)|^2 \underset{\text{termes positifs}}{=} \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}|(e_n|T^{1/2}f_m)|^2$$

(8)

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \|T^{1/2} f_m\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} (T f_m | f_m) = \mathrm{Tr}_f\, T.$$

Donc $\mathrm{tr}\, T$ ne dépend pas du choix de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On a : $\mathrm{tr}(T+S) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((T+S)e_n | e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (Te_n|e_n) + \sum_{n=0}^{+\infty} (Se_n|e_n)$

$= \mathrm{Tr}\, T + \mathrm{Tr}\, S$

De même, si $\lambda \geq 0$: (pour que $\lambda T \geq 0$ et Tr bien défini)

$$\mathrm{Tr}(\lambda T) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((\lambda T) e_n | e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda (Te_n | e_n) = \lambda \,\mathrm{Tr}\, T.$$

3. Si $T - S \geq 0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, ((T-S)e_n | e_n) \geq 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, (Te_n | e_n) \geq (Se_n | e_n)$.

D'où en sommant : $\mathrm{Tr}\, T \geq \mathrm{Tr}\, S$.

4. Si U est unitaire et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H, $(Ue_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une base Hilbertienne de H. Alors :

$$\mathrm{Tr}\, T = \sum_{n=0}^{+\infty} (T(Ue_n) | Ue_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} ((\underbrace{U^*}_{U^{-1}} T U) e_n | e_n)$$

$$= \mathrm{Tr}(U^{-1} T U).$$

De même $U^{-1} = U^*$ et $(U^{-1} e_n)$ est une base Hilbertienne

donc : $\mathrm{Tr}\, T = \sum_{n=0}^{+\infty} (TU^{-1} e_n | U^{-1} e_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (UTU^{-1} e_n | e_n)$

$= \mathrm{Tr}(UTU^{-1})$.

(9) Exercice 8 :

1. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée que l'on complète si besoin est en une base hilbertienne.

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|Te_n\|^2 = (Te_n|Te_n) = (\underbrace{T^*T}_{\geq 0} e_n|e_n)$

$\Rightarrow$) Si $T\in\mathcal{B}_2(H)$: $\exists M\geq 0$,

$$\forall N\geq 1, \sum_{n=0}^{N}\|Te_n\|^2\leq M.$$

D'où : $\forall N\geq 0$, $\sum_{n=0}^{N}(T^*Te_n|e_n)\leq M$

et $\mathrm{Tr}(T^*T) = \sum_{n=0}^{+\infty}(T^*Te_n|e_n)\leq M<+\infty$

$\Leftarrow$) Si $\mathrm{Tr}(T^*T)<+\infty$ alors par positivité,

$$\forall N\geq 0, \sum_{n=0}^{N}(T^*Te_n|e_n)\leq \mathrm{Tr}(T^*T)\ (:=M)$$

i.e. $\forall N\geq 0$ $\sum_{n=0}^{N}\|Te_n\|^2\leq\mathrm{Tr}(T^*T)$

2. Soient $T\in\mathcal{B}_2(H)$, $\varepsilon>0$ et $\{e_0,\dots,e_N\}$ une famille orthonormée de H tel que :

$$\sum_{n=0}^{N}\|Te_n\|^2\geq\|T\|_{HS}-\varepsilon^2.$$

(10) Soit $V = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_N)$.

Alors $H = V \overset{\perp}{\oplus} V^\perp$.

Soit $u \in H$, $\|u\| = 1$. On veut estimer $\|(T - TP_N)u\|$.

On décompose u en : $\exists! (u_V, u_{V^\perp}) \in V \times V^\perp$, $u = u_V + u_{V^\perp}$.

et $\|u\|^2 = \|u_V\|^2 + \|u_{V^\perp}\|^2 \leq 1$ par Pythagore

On a : $(T - TP_N)u = (T - TP_N)u_V + (T - TP_N)u_{V^\perp}$

$= T(I - P_N)u_V + T(I - P_N)u_{V^\perp}$

Or $I - P_N$ est la projection sur $V^\perp$ si P_N projette sur V.

Donc $(I - P_N)u_V = 0$ et $(I - P_N)u_{V^\perp} = u_{V^\perp}$.

Donc : $\|(T - TP_N)u\| = \|T(I - P_N)u_{V^\perp}\| = \|Tu_{V^\perp}\|$

Alors, $\left(e_0, \dots, e_N, \frac{u_{V^\perp}}{\|u_{V^\perp}\|}\right)$ est une famille orthonormée de H donc par définition de $\|T\|_{HS}$:

$$\|T\|_{HS} - \varepsilon^2 + \frac{1}{\|u_{V^\perp}\|^2}\|Tu_{V^\perp}\|^2 \leq \sum_{n=0}^{N} \|Te_n\|^2 + \left\|T\left(\frac{u_{V^\perp}}{\|u_{V^\perp}\|}\right)\right\|^2 \leq \|T\|_{HS}$$

Alors : $\|Tu_{V^\perp}\|^2 \leq \varepsilon^2 \|u_{V^\perp}\|^2$

Il vient : $\|(T - TP_N)u\| = \|Tu_{V^\perp}\| \leq \varepsilon \underbrace{\|u_{V^\perp}\|}_{\leq 1 \text{ car } \|u\|^2 \leq 1} \leq \varepsilon$

D'où : $\|T - TP_N\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \varepsilon$.

3. On en déduit que T est limite de la suite $(TP_N)_{N \geq 0}$ qui sont tous des opérateurs de rang fini. Donc T est compact.

(11)

4. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de $L^2(X)$ et soit $N\geq 1$.

Alors : $$\sum_{n=0}^{N} \|T_k e_n\|^2 = \sum_{n=0}^{N} \int_X \Big| \underbrace{\int_X k(x,y)\, e_n(y)\, dy}_{(e_n|\overline{k(x,\cdot)}) = \overline{(\overline{k(x,\cdot)}|\overline{e_n})}} \Big|^2 dx$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \int_X |(\overline{k(x,\cdot)}\,|\,\overline{e_n})|^2 \, dx$$

$$= \int_X \sum_{n=0}^{N} |(e_n|\overline{k(x,\cdot)})|^2 \, dx$$

Or par Bessel, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |(e_n|\overline{k(x,\cdot)})|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |(e_n|\overline{k(x,\cdot)})|^2$

$$\leq \|k(x,\cdot)\|^2_{L^2(X)}$$

Donc $$\sum_{n=0}^{N} \|T_k e_n\|^2 \leq \int_X \|k(x,\cdot)\|^2_{L^2(X)} \, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \|k\|^2_{L^2(X\times X)}$$

En particulier, $T_k \in \mathcal{B}_2(H)$.

5. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(X,\mathbb{C})$.

Alors $\{\varphi_n \overline{\varphi_m}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est une base hilbertienne de $L^2(X\times X,\mathbb{C})$.

Comme $k\in L^2(X\times X,\mathbb{C})$, $\displaystyle k = \sum_{n,m=0}^{+\infty} \alpha_{m,n}\, \varphi_n \overline{\varphi_m}$

Soit $N\geq 0$ et soit $\displaystyle k_N = \sum_{n,m=0}^{N} \alpha_{m,n}\, \varphi_n \overline{\varphi_m}$. C'est le noyau de $\displaystyle T_{k_N} = \sum_{n,m=0}^{N} \alpha_{m,n} (\varphi_m|\cdot)\, \varphi_n$.

Or $\|k_N - k\|_{L^2(X\times X)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc $\|T_k - T_{k_N}\|_{\mathcal{L}(L^2(X))} \leq \|k-k_N\|_{L^2(X\times X)}$ aussi

(12)

De plus : $\|T_k\|_{HS} = \sum_{m=0}^{\infty} \|T_k \varphi_m\|^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_{m,n}|^2 = \|K\|_{L^2(X\times X)} < +\infty$

Donc $T_k \in \mathcal{B}_2(L^2(X))$ et $U : \begin{array}{l} L^2(X\times X) \to \mathcal{B}_2(L^2(X)) \\ K \mapsto T_k \end{array}$ est une isométrie.

Donc $\operatorname{Im} U$ est fermé.

On sait que l'espace F des opérateurs de rang fini de $L^2(X)$ est dense dans $\mathcal{B}_\infty(L^2(X))$.

Comme $\mathcal{B}_2(L^2(X)) \subset \mathcal{B}_\infty(L^2(X))$, $F \cap \mathcal{B}_2(L^2(X))$ est dense dans $\mathcal{B}_2(L^2(X))$.

Or tout élément de $F \cap \mathcal{B}_2(L^2(X))$ est dans l'image de U donc $\operatorname{Im} U$ est dense dans $\mathcal{B}_2(L^2(X))$ donc U est surjective car $\operatorname{Im} U$ est fermée.

Car si $T \in F$, $T = \sum_{n,m \geq 0}^{N} \alpha_{n,m} (\varphi_m | \cdot) \varphi_n = T_{K_N}$

et T est HS.