AF - Fonda
M1
2019/2020

TD3

1 Exercice 1.

On a toujours : $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)}$.

En effet, $\|T^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ et $\|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$

et réciproquement pour $u \in \mathcal{H}$, $\|u\|=1$, $\|Tu\|^2_{\mathcal{H}} = (Tu|Tu) = (T^*Tu|u) \leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)} \times \|u\|^2_{\mathcal{H}}$

Donc $\|T\|^2_{\mathcal{L}(H)} \leq \|T^*T\|_{\mathcal{L}(H)}$.

Donc comme $T^* = T$, $\|T^2\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|^2_{\mathcal{L}(H)}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$

et $r(T) = \lim_{k\to\infty} \|T^k\|^{1/k} = \lim_{n\to\infty} \|T^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \|T\|^{2^n/2^n} = \|T\|$

Exercice 2 :

On a : $TT' = T'T$. Puis :

$$R_z(T) - R_z(T') = (T-z)^{-1} - (T'-z)^{-1}$$
$$= (T-z)^{-1}(T'-z)(T'-z)^{-1} - (T-z)^{-1}(T-z)(T'-z)^{-1}$$
$$= (T-z)^{-1}\big((T'-z) - (T-z)\big)(T'-z)^{-1}$$
$$= (T-z)^{-1}(T'-T)(T'-z)^{-1}$$
$$= R_z(T)\,(T'-T)\,R_z(T')$$

Or T' et T commutent donc T' et $R_z(T)$ commutent par le lemme de la série de Neumann (et car T, T' sont C^0). Donc : $R_z(T)(T-T') = (T-T')R_z(T)$

$$R_z(T) - R_z(T') = (T'-T)\,R_z(T)R_z(T')$$

2

Exercice 3 :

$\varphi(\mathbb{R}) \subset \sigma(M_\varphi)$: Si $\lambda \in \varphi(\mathbb{R})$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda = \varphi(x_0)$.

Alors $(\varphi - \lambda)^{-1}$ n'est pas définie en x_0, donc $M_\varphi - \lambda$ n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$. Donc $\lambda \in \sigma(M_\varphi)$.

$\sigma(M_\varphi) \subset \varphi(\mathbb{R})$: Soit $\lambda \in \sigma(M_\varphi)$. Soit $v \in L^2(\mathbb{R})$.

Si : $\forall x, \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) - \lambda \neq 0$, alors $u = \frac{v}{\varphi - \lambda} \in L^2(\mathbb{R})$

puisque $\varphi - \lambda$ est C^0, bornée et ne s'annule pas.

En effet $|\varphi - \lambda|$ atteint donc sa borne inf sur $\mathbb{R}$ qui est strictement positive donc $\frac{1}{|\varphi - \lambda|}$ est majorée.

Alors u est l'unique solution dans $L^2(\mathbb{R})$ de $(\varphi - \lambda)u = v$

$\Leftrightarrow (M_\varphi - \lambda)u = v$

D'où $M_\varphi - \lambda$ est inversible et $\lambda \notin \sigma(M_\varphi)$.

Donc $\lambda \in \varphi(\mathbb{R})$ car $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda = \varphi(x_0)$.

3

Exercice 4 :

1. Soit B la boule unité de $C([a,b],\mathbb{C})$.

On va appliquer Ascoli.

- Comme T est borné, (par $\|K\|_\infty$) on a :

$$\forall x \in [a,b], \ |Tu(x)| \leq (x-a)\,\|K\|_\infty \|u\|_\infty \leq (b-a)\|K\|_\infty$$ car $\|u\|_\infty \leq 1$ car $u \in B$.

Donc $\{Tu(x)\}_{u\in B}$ est bornée pour tout $x \in [a,b]$

- Soient $x, x' \in [a,b]$ et $u \in B$. Alors :

$$|Tu(x) - Tu(x')| = \left| \int_a^x K(x,y)u(y)\,dy - \int_a^{x'} K(x',y)u(y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int_a^x (K(x,y) - K(x',y))u(y)\,dy + \int_a^x K(x',y)u(y)\,dy - \int_a^{x'} K(x',y)u(y)\,dy \right|$$

$$= \left| \int_a^x (K(x,y) - K(x',y))u(y)\,dy + \int_{x'}^x K(x',y)u(y)\,dy \right|$$

$$\leq \|u\|_\infty \sup_{y\in[a,b]} |K(x,y) - K(x',y)|\,(b-a) + |x-x'|\,\|K\|_\infty \|u\|_\infty.$$

Or K est C^0 sur $[a,b]^2$ donc elle y est UC^0. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \eta > 0$,

$$|x-x'| < \eta \Rightarrow \sup_{y\in[a,b]} |K(x,y) - K(x',y)| < \varepsilon.$$

Quitte à supposer $\eta \leq \varepsilon$ on a alors :

$$|x-x'| \leq \eta \Rightarrow |Tu(x) - Tu(x')| \leq (b-a)\|u\|_\infty \varepsilon + \|u\|_\infty \|K\|_\infty \varepsilon$$

Donc $\{Tu\}_{u\in B}$ est équicontinue.

Par Ascoli, $T(B)$ est relativement compacte, donc T est un opérateur compact.

(4)

2. Comme T est compact et $C([a,b],\mathbb{C})$ est de dimension infinie, $0 \in \sigma(T)$ et $\sigma(T)\setminus\{0\}$ est composé de valeurs propres isolées.

Soit $\lambda \neq 0$ une vp de T et soit $u \neq 0$ une fonction propre associée : $Tu = \lambda u$

Alors : $\forall x \in [a,b]$, $u(x) = \frac{1}{\lambda}\int_a^x k(x,y)u(y)dy$

Grenwall :
$|y| \leq A + B\int|y|$
alors $|y| \leq Ae^{-Bt}$.

D'où : $|u(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int_a^x |k(x,y)||u(y)|\,dy \leq \frac{\|k\|_\infty}{|\lambda|}\int_a^x |u(y)|dy$

Par le lemme de Grenwall : $u = 0$. $\neq 0$

Contradiction et résultat : $\sigma(T)\setminus\{0\} = \emptyset$ et $\sigma(T) = \{0\}$.

Exercice 5 :

1. On a : $\forall u \in E$, $\|Tu\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_{n+1}| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| = \|u\|_\infty$

Donc T est borné et $\|T\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Alors $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}} \in E$ et

$\forall n \in \mathbb{Z}\; \left(T\left((\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}\right)\right)_n = \lambda^{n+1} = \lambda\,\lambda^n$

Donc λ est vp de T associé à $u = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$. Soit $u \in E$. Soit $f = (T-\lambda)u$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_{n+1} - \lambda u_n = f_n$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n = \lambda u_{n-1} + f_{n-1} = \lambda(\lambda u_{n-2} + f_{n-2}) + f_{n-1}$
$= f_{n-1} + \lambda f_{n-2} + \lambda^2 u_{n-2}$

Par récurrence : $\forall p \geq 1$, $u_n = \sum_{k=1}^{p} \lambda^{k-1} f_{n-k} + \lambda^p u_{n-p}$.

(5) Or u est bornée et $|\lambda|<1$ donc $\lambda^p u_{n-p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$

D'où : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{k-1} f_{n-k}$

la série est cv car $|\lambda|<1$ et (f_n) est bornée car u l'est.

Alors pour $g \in E$, si on pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(R_\lambda g)_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{k-1} g_{n-k}$$, on a $R_\lambda g \in E$

car $\|R_\lambda g\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda|^{k-1} \|g\|_\infty = \frac{1}{1-|\lambda|} \|g\|_\infty$.

Et d'après notre calcul précédent : $(R_\lambda(T-\lambda)g)_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{k-1} ((T-\lambda)g)_{n-k} = g_n$

$R_\lambda (T-\lambda) = I$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $((T-\lambda) R_\lambda g)_n = g_n$ par un décalage d'indice. En effet : $((T-\lambda)(R_\lambda g))_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^{k-1} \underbrace{g_{n+1-k}}_{g_{n-(k-1)}} - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k g_{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k g_{n-k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda^k g_{n-k}$$

$$= \lambda^0 g_{n-0} = g_n.$$

Finalement : $(T-\lambda) R_\lambda = R_\lambda (T-\lambda) = I$

donc $R_\lambda = (T-\lambda)^{-1}$ et comme R_λ est C^0 $\left(\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant \frac{1}{1-|\lambda|}\right)$

$\lambda \notin \sigma(T)$.

4. On a par 1, $\sigma(T) \subset \overline{D(0,1)}$

Puis : $\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$, $\lambda \in \sigma(T)$.

Enfin : $\forall \lambda \in D(0,1)$, $\lambda \notin \sigma(T)$. Donc $\sigma(T) = \mathbb{S}^1$.

(6) Soit $|\lambda|<1$.

5. Supposons par l'absurde $\lambda \notin \sigma(T_F)$, $(T-\lambda)(F)=F$

car $(T-\lambda)(F) \subset F$ par stabilité et $(T-\lambda)^{-1}(F) \subset F$ par le lemme de la série de Neumann. i.e. $(T-\lambda)(F) \supset F$.

Donc $F = R_\lambda(F)$ aussi.

Mais, si $g \in F$ est définie par $g_n = 1$ pour $n \leq 0$ et $g_n = 0$ pour $n > 0$, alors pour $n > 0$:

$$(R_\lambda g)_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{k-1} = \frac{\lambda^{n-1}}{1-\lambda} \neq 0 \quad \text{si } \lambda \neq 0.$$

Donc $R_\lambda g \notin F$ par def de F.

Si $\lambda = 0$ on a $(R_0 g)_1 = 1$ donc $R_0 g \notin F$.

Donc $g \in F$ mais $R_\lambda(g) \notin F$ et on ne peut avoir $F = R_\lambda(F)$. Donc $\lambda \in \sigma(T_F)$.

6. Par 1, $\|T_F\| \leq \|T\| = 1$ donc $\sigma(T_F) \subset \overline{D(0,1)}$.

Par 5, $D(0,1) \subset \sigma(T_F)$. Or T_F étant borné, son spectre est fermé, donc $\sigma(T_F) = \overline{D(0,1)} \neq \sigma(T)$.

(7) Exercice 6 :

1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Supposons $m < n$.

Par Pythagore : $\forall u \in H$, $\|\sum_{j=m}^{n} \lambda_j P_j u\|_{H}^2 = \sum_{j=m}^{n} \|\lambda_j P_j u\|_{H}^2$

$\leq \sup_{j \geq m} |\lambda_j|^2 \|u\|_{H}^2$.

Comme $\lambda_n \to 0$, la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n\right)_{N \geq 0}$ est de Cauchy

dans l'espace complet $\mathcal{L}(H)$, donc elle y converge.

Sa limite est limite d'op de rang fini donc

c'est un op compact.

2. De plus si les λ_n sont réels, les $\lambda_n P_n$ sont

tous a-a et T est a-a comme limite

forte d'op a-a :

si $\forall n$, $(\lambda_n P_n)^* = \lambda_n P_n$ alors

$\|(\lambda_n P_n)^* - T^*\| = \|(\lambda_n P_n - T)^*\| = \|\lambda_n P_n - T\| \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

Donc $(\lambda_n P_n)^* \to T^*$
$(\lambda_n P_n) \to T$ donc $T = T^*$.