(1) Reprise exercice 3 / TD3

Enoncé On considère l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ où $\mathbb{R}$ est muni de la mesure de Lebesgue. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et soit

$$M_\varphi : \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ u \longmapsto \varphi u \end{array}$$

l'opérateur de multiplication par φ.

Alors M_φ est un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $\|M_\varphi\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} = \|\varphi\|_{L^\infty}$. Montrons que

$$\sigma(M_\varphi) = \mathrm{Im\,ess}\,\varphi := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0, \mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon))) > 0\}$$

l'image essentielle de φ.

Démonstration : • Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im\,ess}\,\varphi$. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \ \mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon))) = 0$$

i.e. $\exists \varepsilon > 0$, pour Leb-pt $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \notin D(\lambda,\varepsilon)$

i.e. $\exists \varepsilon > 0$, pour Leb-pt $x \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x) - \lambda| \geq \varepsilon$.

• Soit $v \in L^2(\mathbb{R})$. On veut résoudre $(M_\varphi - \lambda)u = v$ avec $u \in L^2(\mathbb{R})$. Posons : $u = \dfrac{v}{\varphi - \lambda}$ définie pp et $u = 0$ lorsque $\dfrac{1}{\varphi-\lambda}$ n'est pas définie, i.e. lorsque $\varphi - \lambda$ s'annule.

Alors, puisque $|\varphi - \lambda| \geq \varepsilon$ pp on a : $|u|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2}|v|^2$ Leb-pp et $u \in L^2(\mathbb{R})$. D'où $\lambda \in \rho(M_\varphi)$

Donc par contraposée : $\boxed{\sigma(M_\varphi) \subset \mathrm{Im\,ess}\,\varphi}$

② • Réciproquement, montrons que $\mathrm{Im\,ess}\,\varphi \subset \sigma(M_\varphi)$. Là encore, il suffit de montrer que $\rho(M_\varphi) \subset (\mathrm{Im\,ess}\,\varphi)^c$. Soit donc $\lambda \in \rho(M_\varphi)$. Alors : $\exists C>0, \forall u \in L^2(\mathbb{R}), \|(M_\varphi-\lambda)^{-1}u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{L^2}$ $(*)$

Pour $\varepsilon>0$, posons $u_\varepsilon = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon))} \in L^2(\mathbb{R})$.

Alors $\|(M_\varphi-\lambda)^{-1}u_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{u_\varepsilon}{\varphi(x)-\lambda}\right|^2 dx = \int_{\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon))} \frac{1}{|\varphi(x)-\lambda|^2} dx$

Or, si $x \in \varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon))$, $\varphi(x) \in D(\lambda,\varepsilon)$ et $|\varphi(x)-\lambda|^2 \leq \varepsilon^2$

d'où $\frac{1}{|\varphi(x)-\lambda|^2} \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$. D'où : $\|(M_\varphi-\lambda)^{-1}u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon)))$

D'où, par $(*)$: $\frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon))) \leq C\,\mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon)))$

$\iff \mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon))) \leq C\varepsilon^2\,\mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon)))$

Pour $\varepsilon>0$ tel que $C\varepsilon^2<1$ on a $\mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda,\varepsilon)))=0$ et $\lambda \notin \mathrm{Im\,ess}\,\varphi$. D'où l'inclusion voulue.

• On a bien, par double inclusion : $\sigma(M_\varphi) = \mathrm{Im\,ess}\,\varphi$.

□

<u>Remarque :</u> Si φ est de plus continue (et toujours bornée) et si φ est définie sur un intervalle compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ alors

$$\mathrm{Im\,ess}\,\varphi = \varphi([a,b]) \quad \text{(qui est bien fermé car compact)}$$

En effet : si $y \in \varphi([a,b])$, pour tout $\varepsilon>0$, $D(y,\varepsilon)$ est un disque ouvert donc par C^0 de φ, $\varphi^{-1}(D(y,\varepsilon))$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Leb}(\varphi^{-1}(D(y,\varepsilon)))>0$, donc $\lambda \in \mathrm{Im\,ess}\,\varphi$.

Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im\,ess}\,\varphi$, pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in \varphi^{-1}(D(y,\frac{1}{n}))$ et $|\varphi(x_n)-y| < \frac{1}{n}$. Or il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers $x \in [a,b]$ et par C^0 de φ, $\varphi(x)=y$ i.e. $y \in \varphi([a,b])$.

③ On a donc bien dans ce cas :

$$\mathrm{Im\,ess}\,\varphi = \varphi([a,b]).$$

Par contre, en général, il est faux que $\mathrm{Im\,ess}\,\varphi = \varphi(\mathbb{R})$ si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est C^0 est borné, comme le montre le contre-exemple de $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{-|x|} \end{array}$: $\varphi(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$ et

$\mathrm{Im\,ess}\,\varphi = [0,+\infty[$.