Institut Galilée **2019-2020**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Devoir Maison

A rendre pour le 21/11/2019

Problème 1

Soit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. On le munit de la norme $||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Alors $(\ell^\infty(\mathbb{N}), ||\ ||_\infty)$ est un espace de Banach.

1. Montrer que la boule unité de $(\ell^\infty(\mathbb{N}), ||\ ||_\infty)$ n'est pas compacte.
2. Soit $F = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \frac{1}{n}\}$, que l'on munit de la norme $||\ ||_\infty$ induite par celle sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
   (a) Soit $K = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $G = \{f\ :\ K \to \mathbb{R} \mid \forall x \in K,\ |f(x)| \leq x\}$, que l'on munit de la norme $||\ ||_K$ définie par, pour toute $f \in G$, $||f||_K = \sup_{x\in K} |f(x)|$.
   Montrer que G est fermé dans $C(K, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, pour la norme $||\ ||_K$.
   (c) On considère l'application

$$T\ :\ \begin{array}{ccc} F & \to & G \\ u & \mapsto & \left(f\ :\ \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R} \\ \frac{1}{n} & \mapsto & u_n \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

   Montrer que T est une ismoétrie. Montrer que T est bijective et calculer T^{-1}. En déduire que T est un homéomorphisme de $(F, ||\ ||_\infty)$ dans $(G, ||\ ||_K)$.
   (d) En déduire que F est compacte si et seulement si G est compacte.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \in K$, $\{f(x) \mid f \in G\}$ est bornée.
   (b) Montrer que G est équicontinue.
   (c) En déduire que G est compacte et que F est compacte.

Problème 2

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X, \mu)$, fermé dans $L^p(X, \mu)$ pour un $p \in [1, +\infty[$.
On se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. (a) Montrer que F est fermé dans $L^\infty(X, \mu)$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^\infty} \leq C||f||_{L^p}.$$
2. On suppose que $p \leq 2$. Montrer qu'il existe un réel $B_1 > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^p} \leq B_1||f||_{L^2}.$$
3. On suppose que $p > 2$.
   (a) Montrer que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^p} \leq ||f||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \, ||f||_{L^\infty}^{\frac{p-2}{p}}.$$
   (b) En déduire qu'il existe un réel $B_2 > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^p} \leq B_2||f||_{L^2}.$$
4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe un réel $B > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^\infty} \leq B||f||_{L^2}.$$
5. On munit F du produit scalaire de $L^2(X, \mu)$. Soit $N \geq 1$ un entier et soit $(e_1, \ldots, e_N)$ un système orthonormé dans F.
   (a) Montrer que, pour μ-presque tout $x \in X$, pour tous $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$,
$$\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x)\right| \leq \left|\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j\right|\right|_\infty.$$
   Indication : on pourra utiliser la densité de $(\mathbb{Q} + \mathrm{i}\mathbb{Q})^N$ *dans* $\mathbb{C}^N$.
   (b) En déduire que, pour μ-presque tout $x \in X$, pour tous $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$,
$$\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x)\right| \leq B\left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
   (c) Montrer que, pour μ-presque tout $x \in X$,
$$\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2 \leq B^2.$$
   (d) En déduire que $N \leq B^2\mu(X)$.
6. Montrer que F est de dimension finie et que $\dim(F) \leq B^2\mu(X)$.