

Feuille de TD 2 : Opérateurs bornés - Opérateurs compacts

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}(H)$, alors $T_n \rightarrow T$ si et seulement si $T_n^* \rightarrow T^*$.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que le graphe de T^* ,

$$\Gamma(T^*) = \{(u, T^*u) \mid u \in H\} = (R(\Gamma(T)))^\perp$$

où $R : H \times H \rightarrow H \times H$ est définie par $R(u, v) = (-v, u)$.

Exercice 3

Soient $(H_1, (\cdot|\cdot)_{H_1})$ et $(H_2, (\cdot|\cdot)_{H_2})$ deux espaces de Hilbert. On dit que $U : H_1 \rightarrow H_2$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert lorsque U est linéaire et

$$\forall x, y \in H_1, (Ux|Uy)_{H_2} = (x|y)_{H_1}.$$

Montrer que $U : H_1 \rightarrow H_2$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert si et seulement si U est inversible et $U^{-1} = U^*$. On dit encore que U est *unitaire*.

Exercice 4

Soit $H = L^2(X, \mathbb{C})$ et soit $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$. Soit T_K l'opérateur défini sur H par

$$\forall u \in H, \forall x \in X, T_K u(x) = \int_X K(x, y) u(y) dy.$$

1. Montrer que T_K est bien défini.
2. Montrer que $\|T_K\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2(X \times X, \mathbb{C})}$.
3. Calculer l'adjoint de T_K .

Exercice 5

Vérifier que l'opérateur de multiplication T , défini sur $L^2([0, 2], \mathbb{C})$ par

$$\forall u \in L^2([0, 2], \mathbb{C}), \forall x \in [0, 2], (T(u))(x) = xu(x),$$

n'est pas compact, mais qu'il est borné et auto-adjoint.

Exercice 6

Soit H un espace de Hilbert et soit U un opérateur unitaire sur H .

1. Montrer que $H = \text{Ker}(U - I) \oplus \overline{\text{Im}(U - I)}$.
2. Soit P le projecteur orthogonal d'image $\text{Ker}(U - I)$. Soit, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{I + U + \dots + U^n}{n + 1}.$$

Montrer que, pour tout $u \in H$, $S_n u \rightarrow Pu$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7 - Trace d'un opérateur positif

Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H .

Soit T un opérateur positif sur H , i.e. T est borné, auto-adjoint et pour tout $u \in H$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}_+$.

On admettra qu'il existe un unique opérateur positif S tel que $S^2 = T$. On le note $T^{\frac{1}{2}}$.

On pose

$$\text{tr } T = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n|e_n) \in [0, +\infty].$$

Le réel $\text{tr } T$ est appelé trace de l'opérateur T .

1. Montrer que la trace est indépendante du choix de la base hilbertienne de H .
2. Montrer que, pour tous opérateurs positifs T et S , $\text{tr}(T + S) = \text{tr } T + \text{tr } S$ et que, pour tout $\lambda \geq 0$, $\text{tr}(\lambda T) = \lambda \text{tr } T$.
3. Montrer que si T et S sont deux opérateurs positifs tels que $0 \leq T - S$, alors $\text{tr } S \leq \text{tr } T$.
4. Montrer que, pour tout opérateur unitaire U , $\text{tr}(UTU^{-1}) = \text{tr}(U^{-1}TU) = \text{tr } T$.

Exercice 8 - Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur T sur H est dit de Hilbert-Schmidt lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H , on a

$$\forall N \geq 0, \sum_{n=0}^N \|Te_n\|^2 \leq M.$$

On note $\|T\|_{HS}$ le plus petit M vérifiant cette inégalité. Soit $\mathcal{B}_2(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

1. Montrer que $T \in \mathcal{B}_2(H)$ si et seulement si $\text{tr}(T^*T) < \infty$.
2. Soient $T \in \mathcal{B}_2(H)$, $\varepsilon > 0$ et $\{e_0, \dots, e_N\}$ une

famille orthonormée de H tel que

$$\sum_{n=0}^N \|Te_n\|^2 \geq \|T\|_{HS}^2 - \varepsilon^2.$$

Si P_N désigne le projecteur orthogonal sur $V = \text{Vect}(e_0, \dots, e_N)$, montrer que $\|T - TP_N\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \varepsilon$.

3. En déduire que T est compact.

4. Si $H = L^2(X, \mathbb{C})$, soit $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$. Montrer que l'opérateur T_K défini sur H par

$$\forall u \in H, \forall x \in X, T_K u(x) = \int_X K(x, y) u(y) dy$$

est de Hilbert-Schmidt.

Remarque : On peut montrer que réciproquement, si $T : H \rightarrow H$ est dans $\mathcal{B}_2(H)$, il existe $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$ tel que $T = T_K$.