Institut Galilée **2019-2020**
Filière M1
Analyse fonctionnelle - Option "Fondamentale"

Feuille de TD 3 : Spectre d'un opérateur borné

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors $r(T) = \|T\|$.

Exercice 2

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach. Soient T et T' dans $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \max(\|T\|_{\mathcal{L}(E)}, \|T'\|_{\mathcal{L}(E)})$. Démontrer la seconde identité de la résolvante,

$$R_z(T) - R_z(T') = (T' - T)R_z(T)R_z(T').$$

Exercice 3

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée. Montrer que $\sigma(M_\varphi) = \varphi(\mathbb{R})$ où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Soit $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On considère l'opérateur $T : C([a, b], \mathbb{C}) \to C([a, b], \mathbb{C})$ défini par : $\forall u \in C([a, b], \mathbb{C})$,

$$\forall x \in [a, b],\ Tu(x) = \int_a^x K(x, y)u(y)\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que T est compact.
2. Montrer que $\sigma(T) = \{0\}$.

Exercice 5

Soit E l'espace $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des suites bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, muni de la norme:

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|.$$

Soit T l'opérateur sur E défini par :

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (Tu)_n = u_{n+1}.$$

1. Calculer la norme de T.
2. Montrer que tout nombre complexe de module 1 est valeur propre de T.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. Soit $u \in E$. On note $(T-\lambda)u = f$. Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer u_n en fonction de $f_{n-1}, \ldots, f_{n-p}$ et de u_{n-p}. Que devient cette expression lorsque p tend vers $+\infty$? En déduire que λ n'appartient pas au spectre de T.
4. En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer le spectre de T.

On considère le sous-espace fermé F de E constitué des suites u telles que $u_n = 0$ pour tout $n > 0$. Alors, $T(F) \subset F$ et on désigne par T_F l'opérateur induit par T sur F.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. En utilisant l'expression de $(T - \lambda)^{-1}$ trouvée à la question 3, montrer que λ appartient au spectre de T_F.
6. En utilisant les résultats des questions 1 et 5, déterminer le spectre de T_F. Comparer avec le résultat obtenu à la question 4.

Exercice 6

Soit H un espace de Hilbert. Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls tendant vers 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n un projecteur orthogonal de rang fini avec $P_mP_n = 0$ si $m \neq n$.
1. Montrer que $\sum \lambda_n P_n$ converge pour la norme d'opérateur vers un opérateur $T \in \mathcal{B}_\infty(H)$.
2. Si de plus les λ_n sont réels, montrer que T est auto-adjoint.