Feuille de TD 1 : Applications linéaires - Théorème de Baire

Exercice 1

On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et on définit l'application $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $u(f) = f(1)$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$.

Montrer que u n'est pas continue.

Indication : on pourra utiliser la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sqrt{n} x^n$.

2. On munit maintenant E de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

L'application u est-elle continue de E dans $\mathbb{R}$?

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}([a, b])$ munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit p une fonction continue sur $[a, b]$. Pour $f \in E$, on pose :

$$[\Phi(f)](x) = \int_a^x f(t)p(t) dt, \quad \text{pour tout } a \leq x \leq b.$$

1. Montrer que si f est continue, alors $\Phi(f)$ est continue.

2. Montrer que l'application Φ qui à f associe $\Phi(f)$ est un endomorphisme continu de E . Montrer que

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \int_a^b |p(t)| dt.$$

3. On suppose que $p \geq 0$. Par un choix simple de f , montrer que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b p(t) dt$.

4. (Dans cette question, on ne suppose pas que $p \geq 0$). On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], f_n(t) = \frac{np(t)}{\sqrt{1 + n^2(p(t))^2}}.$$

Montrer que $f_n \in E$. Calculer $\|\Phi(f_n)\|_\infty$. En déduire que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b |p(t)| dt$.

Exercice 3

Trouver une suite $(\mathcal{O}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ ne soit pas ouvert.

Exercice 4

Montrer que si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'un espace complet E dont la réunion est égale à E , alors l'ouvert $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Int}(F_n)$ est dense dans E .

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $a > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(na) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème de Baire aux fermés

$$F_p = \{a \geq 0, \forall n \geq p, |f(na)| \leq \varepsilon\},$$

montrer que f admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 6

Soit f une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$. Montrer que si en chaque point $z \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$, alors f est un polynôme.

Indication : on pourra utiliser les fermés

$$F_n = \{z \in \mathbb{C}, f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Exercice 7

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler pourquoi $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$.

3. En déduire que V ne peut être fini ou dénombrable.

Exercice 8

Soit $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Un réel x est diophantien d'exposant τ lorsqu'il existe une constante $c > 0$ telle, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\tau}.$$

On note $\mathcal{D}(\tau)$ l'ensemble des réels diophantiens d'exposant τ . Soit $\mathcal{D} = \cup_{\tau > 0} \mathcal{D}(\tau)$. Un élément de $\mathcal{D}$ est dit diophantien. Enfin, un réel x est liouvillien s'il n'est ni rationnel ni diophantien. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des nombres liouvilliens.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\tau > 0$, posons

$$L_n(\tau) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq^\tau} \right\}.$$

Montrer que $L_n(\tau)$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$.

2. En déduire que $\mathcal{D}$ est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. On dit que $\mathcal{D}$ est *maigre*.

3. Montrer que $\mathcal{L}$ contient une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{L}$ est *résiduel* de $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f .

1. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_{m,n} = \{x \in E, |f_m(x) - f_l(x)| \leq \frac{1}{n}, \forall l \in \mathbb{N}, l \geq m\}.$$

Montrer que $A_{m,n}$ est un fermé de E .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que $E = \cup_{m \in \mathbb{N}} A_{m,n}$.

3. On pose $O_{m,n} = \text{Int}(A_{m,n})$. Montrer que $O_n = \cup_{m \in \mathbb{N}} O_{m,n}$ est un ouvert dense de E .

4. Nous allons montrer que f est continue en tout point de $G = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n$. Soit $a \in G$ et soit $\varepsilon > 0$.

a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $x \in O_{m,n}$, $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

b. Pour cet entier m , montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $|f_m(x) - f_m(a)| \leq \varepsilon$.

c. Déduire des questions précédentes que f est continue au point a .

5. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un résiduel de E .

6. La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, est-elle la limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues?