

Feuille de TD 2 : Théorèmes de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte

Exercice 1

Soit E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur $T_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall f \in E, T_n f = n \int_0^1 f(x) dx - \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Alors, $\frac{|T_n f|}{n}$ est l'erreur commise dans le calcul de l'intégrale de f lorsque l'on prend une somme de Riemann correspondant à une subdivision régulière de $[0, 1]$ en n intervalles égaux.

1. Minorer la norme de T_n pour tout n . *Indication : on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \sin^2(n\pi x)$.*
2. En déduire qu'il existe G , un G_δ dense dans E , tel que pour toute $f \in G$, $\frac{|T_n f|}{n}$ n'est pas un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

Soient $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |u_n| < +\infty$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

1. Soit $A = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mid u_n = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } n\}$. Montrer que A est dense dans $(\ell^1(\mathbb{N}), \| \cdot \|_1)$ mais pas dans $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \| \cdot \|_\infty)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite de réels strictement positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$(a_n u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \iff (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}).$$

Exercice 3

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$ deux espaces de Banach et soit $B : E \times F \rightarrow \mathbb{C}$ une application bilinéaire. On suppose que, pour tout $u \in E$, $v \mapsto B(u, v)$ est une application linéaire continue sur F et que, pour tout $v \in F$, $u \mapsto B(u, v)$ est une application linéaire continue sur E .

Montrer que la forme bilinéaire B est continue sur $E \times F$.

Exercice 4

Soit $E = L^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π -périodiques localement intégrables sur $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

Soit $F = c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des familles $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|$.

On se propose de montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$T : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{array}$$

1. Rappeler pourquoi T est bien définie, linéaire, continue et injective.

2. Montrer que si T est surjective, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$\|f\|_{L^1} \leq \delta \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

3. Pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, 2π -périodique, on choisit une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes de module 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{\alpha}_n c_n(g) = |c_n(f)|$. En appliquant la question 2 à

$$f_N = \sum_{|n| \leq N} \alpha_n e^{inx},$$

montrer que, si T est surjective, pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{|n| \leq N} |c_n(g)| \leq \delta \|g\|_\infty$$

4. Conclure.

Exercice 5

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs complexes, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. On se donne un réel α tel que $0 < \alpha < 1$ et on note E_α le sous-espace de E constitué des fonctions f telles qu'il existe une constante $A > 0$ pour laquelle :

$$\forall x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq A|x - y|^\alpha$$

On munit E_α de la norme :

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Alors $(E_\alpha, \| \cdot \|_\alpha)$ est un espace de Banach. Soit F un sous-espace fermé de $(E, \| \cdot \|_\infty)$. On suppose que F est contenu dans E_α et on se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. Montrer que F est fermé dans $(E_\alpha, \| \cdot \|_\alpha)$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout élément f de F , $\|f\|_\alpha \leq C\|f\|_\infty$.
3. Conclure en étudiant la boule unité de $(F, \| \cdot \|_\infty)$.