Institut Galilée **2019-2020**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Feuille de TD 3 : Théorème d'Ascoli et espaces de Hilbert

Exercice 1

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $||u||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$.

1. Montrer que la boule unité de $(E, || \ ||_\infty)$ n'est pas compacte.

2. Pour $k \in \mathbb{R}_+$ et $M > 0$, on pose

$$F_{k,M} = \{u \in E \mid |u(0)| \leq M \text{ et } u \ k\text{−lipschitzienne}\}.$$

a. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\{u(x) \mid u \in F_{k,M}\}$ est bornée.

b. Montrer que $F_{k,M}$ est équicontinue.

c. En déduire que $F_{k,M}$ est compacte.

Exercice 2

Soit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.
On le munit de la norme $||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Alors $(\ell^\infty(\mathbb{N}), || \ ||_\infty)$ est un espace de Banach.

1. Montrer que la boule unité de $(\ell^\infty(\mathbb{N}), || \ ||_\infty)$ n'est pas compacte.

2. Soit $F = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq \frac{1}{n}\}$, que l'on munit de la norme $|| \ ||_\infty$ induite par celle sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

a. Soit $K = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}$.

b. Soit $G = \{f \ : \ K \to \mathbb{R} \mid \forall x \in K,\ |f(x)| \leq x\}$, que l'on munit de la norme $|| \ ||_K$ définie par, pour toute $f \in G$, $||f||_K = \sup_{x\in K} |f(x)|$.
Montrer que G est fermé dans $C(K,\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, pour la norme $|| \ ||_K$.

c. On considère l'application

$$T \ : \ \begin{array}{ccc} F & \to & G \\ u & \mapsto & \left(f \ : \ \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R} \\ \frac{1}{n} & \mapsto & u_n \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Montrer que T est un homéomorphisme de $(F, || \ ||_\infty)$ dans $(G, || \ ||_K)$.

d. En déduire que F est compacte si et seulement si G est compacte.

3.a Montrer que, pour tout $x \in K$, $\{f(x) \mid f \in G\}$ est bornée.

b. Montrer que G est équicontinue.

c. En déduire que G est compacte et que F est compacte.

Exercice 3

On considère $\mathcal{H} = L^2([0,1],\mathbb{R})$ qui, munit du produit scalaire usuel, est un espace de Hilbert. On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathcal{H} \\ t & \mapsto & \mathbf{1}_{[0,t]}. \end{array}$$

où $\mathbf{1}_{[0,t]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,t]$, qui vaut 1 sur $[0,t]$ et 0 partout ailleurs.

1. Montrer que φ est continue. Montrer que φ est nulle part dérivable.

2. Montrer que si $0 \leq s < s' \leq t < t' \leq 1$, alors $\varphi(s') - \varphi(s)$ est orthogonale à $\varphi(t') - \varphi(t)$.

Exercice 4

On définit une application $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer que la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire précédent.

3. Soit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Calculer $\|Q\|^2$.

4. On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$$

Montrer que $M \geqslant 1$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 5

On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soient p et q deux entiers naturels. Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

3. Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6

Soit $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ l'espace des suites de carré sommable, munit de la norme définie par :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}),\ ||(x_n)||_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ fixé, on note M_N le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} x_n = 0$.

1. Montrer que l'application $T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{N} x_n$ est une forme linéaire continue sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Que peut-on en déduire sur M_N?

2. Justifier que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = M_N \overset{\perp}{\oplus} M_N^{\perp}$.

3. Soit $E = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall 0 \leq i < j \leq N,\ y_i = y_j \text{ et } \forall n > N,\ y_n = 0\}$.

a. Montrer que $E \subset M_N^{\perp}$.

b. Montrer que $M_N^{\perp} = E$. *Indication : on remarquera que pour $0 \leq i < j \leq N$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_n = 0$ pour $n \neq i, j$ appartient à M_N.*

Exercice 7

Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et A un endomorphisme continu de H.

1. Soit $y \in H$ fixé.

a. Montrer que la forme linéaire $\phi_y : x \mapsto \langle y|Ax\rangle$ est continue.

b. En déduire qu'il existe un vecteur A^*y tel que :

$$\forall x \in H, \quad \langle y|Ax\rangle = \langle A^*y|x\rangle.$$

2. Montrer que l'application de H dans H, $y \mapsto A^*y$ est un endomorphisme continu de H. On appelle A^* l'adjoint de A.

3. Vérifier que $(A^*)^* = A$ et que $|||A^*||| = |||A|||$.

4. Soit $H = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Calculer la matrice de A^* dans la base canonique en fonction de celle de A.

5. Soit T l'application linéaire définie sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (Tu)_n = u_{n+1}.$$

a. Justifier que T est continue.

b. Calculer l'adjoint T^* de T.