Institut Galilée **2019-2020**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Examen d'Analyse Fonctionnelle - Option Fondamentale

Le 14 janvier 2020

Durée de l'épreuve : 1h30.

Documents et appareils électroniques interdits, à l'exception des calculatrices de l'institut Galilée. Toute affirmation doit être justifiée rigoureusement. Les calculs intermédiaires doivent être indiqués.

Exercice 1. Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert complexe. On note $||\cdot||$ la norme sur H associée au produit scalaire.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite normée de H, *i.e.*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||x_n|| = 1$. Justifier que l'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite faiblement convergente dans H.

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite normée de H qui converge faiblement vers $x \in H$. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x||^2 = 1 - ||x||^2.$$

3. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur borné sur H tel qu'aucun vecteur normé $x \in H$ ne vérifie $||T||_{\mathcal{L}(H)} = ||Tx||$ (cela signifie que la norme de T n'est pas atteinte).

   (a) Montrer qu'il existe une suite normée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente et telle que :
   $$\lim_{n\to+\infty} ||Tx_n|| = ||T||_{\mathcal{L}(H)}.$$

   (b) Montrer que cette suite normée converge faiblement vers le vecteur nul de H.

Exercice 2. Soit $(\ell^2(\mathbb{Z}), (\cdot|\cdot)_2)$ l'espace de Hilbert des suites à valeurs complexes de module au carré sommable, indexées par $\mathbb{Z}$, muni du produit scalaire :
$$\forall u, v \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ (u|v)_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \overline{v_n}.$$

Soit S_1 l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par
$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (S_1 u)_n = u_{n+1}.$$

1. Montrer que S_1 est un opérateur borné et calculer sa norme.

2. Montrer que l'adjoint de S_1 est l'opérateur $S_{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ défini par
$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (S_{-1} u)_n = u_{n-1}.$$

3. Montrer que $T = S_1 + S_{-1}$ est auto-adjoint.

4. Montrer que le spectre de T est inclus dans l'intervalle $[-2, 2] \subset \mathbb{R}$.