Institut Galilée 2019-2020
Filière M1
Analyse fonctionnelle

# Examen d'Analyse Fonctionnelle - Tronc Commun

**janvier 2020**

Durée de l'épreuve : 1 heure 30.

*Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.*
*Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.*

**Exercice 1.** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\text{pour tout } a \in [1, \infty[\,, \ \lim_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\to\infty}} f(na) = +\infty.$$

Soit $M > 0$ fixé. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$F_p = \big\{a \in [1, \infty[\,, \text{ tels que pour tout entier } n \geq p,\ f(na) \geq M\big\}.$$

1. Montrer que $F_p$ est fermé.
2. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} F_p = [1, \infty[\,.$
3. En utilisant le théorème de Baire, en déduire que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

**Exercice 2.**

1. Soient $f, g$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $C^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ et $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g$, alors $f$ est de classe $C^1$ et $f' = g$.
2. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$. On suppose que tous les éléments de $F$ sont de classe $C^1$.
   (a) Soit l'application $T : E \to F$ définie par $T(f) = f'$. En utilisant la question 1 et le théorème du graphe fermé, montrer que $T$ est continue.
   (b) Montrer que la boule unité fermée de $F$ est compacte dans $E$ (on utilisera (a) et le théorème d'Ascoli).
   (c) Déduire de ce qui précède que $F$ est de dimension finie.

**Exercice 3.** Soit $p \in\ ]1, \infty[\,,\ a \in [0, (p-1)/p[$ et $f \in L^p([0, 1])$. On définit une application $T : f \to T_f$ sur $L^p([0, 1])$ par

$$T_f(x) = \int_0^x t^{-a} f(t)\, dt\,, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^p([0, 1])$, on a l'inégalité
$$|T_f(x) - T_f(y)| \leq M\|f\|_p|x - y|^\alpha, \qquad 0 \leq x < y \leq 1,$$
où $M, \alpha > 0$ sont des constantes indépendantes de $f$ que l'on calculera.
2. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que $T$ est linéaire continue de $L^p([0, 1])$ dans $E$, avec $\|T\|_{\mathcal{L}(L^p,E)} \leq M$.
3. On note $B$ la boule unité de $L^p([0, 1])$ et $A = \overline{T(B)}$. Montrer que $A$ est compacte dans $E$.