Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS
Année universitaire 2019-2020

Problème 1 : L'équation de Bessel

A rendre pour le mardi 10 septembre 2019.

On étudie dans ce problème quelques propriétés des fonctions de Bessel, obtenues à partir de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un paramètre réel positif.

Partie I

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.
2. Pour deux réels A et B, déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B réels pour que la fonction
$$x \mapsto \frac{A\cos(x) + B\sin(x)}{\sqrt{x}}$$
admette une limite finie en 0^+. Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\frac{A\cos(x)+B\sin(x)}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+.

Partie II

On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(E_{\frac{1}{2}}) \qquad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$?
2. Soit y une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :
$$z \ : \ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{2}}y(x). \end{array}$$
Démontrer que y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
3. Résoudre l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
4. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0^+ est un espace vectoriel de dimension 1.
5. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$, notée $f_{\frac{1}{2}}$, telle que :
$$f_{\frac{1}{2}} \underset{x \to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}.$$

Partie III

Dans cette partie, α est un réel fixé, $\alpha \geq 0$, et on considère les équations différentielles :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

et

$$(E'_\alpha) \qquad xz'' + (2\alpha + 1)z' + xz = 0.$$

1. On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\Gamma \; : \; \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \end{array}$$

   Justifier que la fonction Γ est bien définie, que $\Gamma(1) = 1$ et que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

2. On considère une série entière $\sum a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté R et dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée S. On suppose dans cette question que R est strictement positif.
   (a) Rappeler une définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
   (b) On suppose dans cette question que S est solution de l'équation différentielle (E'_α) sur $]-R, R[$. Démontrer que $a_1 = 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; (n + 1)(n + 1 + 2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0.$$

3. On suppose que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfait les deux conditions obtenues à la question précédente.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
   (b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\Gamma(\alpha + 1)}{n!2^{2n}\Gamma(n + \alpha + 1)}a_0.$$

4. Préciser la nature de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_α).

5. Soit $y \; :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction z par :

$$z \; : \; \begin{array}{ll}]0, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad x^{-\alpha}y(x) \end{array}$$

   Démontrer que y est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, z est solution de (E'_α) sur $]0, +\infty[$.

6. En déduire que la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \; f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n+\alpha}\Gamma(n + \alpha + 1)}x^{2n+\alpha}$$

   est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

7. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0^+.