Problème 2 : Réduction de Jordan-Dunford

A rendre pour le mardi 17 septembre 2019.

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit $m \geq 1$ un entier. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie m . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Rappelons qu'un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par u lorsque $u(F) \subset F$.

- Supposons que E se décompose en une somme directe $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ où $p \geq 1$ est un entier et où chacun des E_i est un sous-espace vectoriel de E stable par u . Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit $\mathcal{B}_i = (e_1^i, \dots, e_{d_i}^i)$ une base de E_i et posons

$$\mathcal{B} = \bigwedge_{i=1}^p \mathcal{B}_i = (e_1^1, \dots, e_{d_1}^1, \dots, e_1^p, \dots, e_{d_p}^p)$$

la base obtenue par concaténation ordonnée des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$. Montrer que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u|_{E_1})} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(u|_{E_p})} \end{bmatrix}$$

- Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Supposons que le polynôme caractéristique de u , noté χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, *i.e.*,

$$\chi_u = (-1)^m (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on pose $N_{\lambda_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Les N_{λ_i} sont appelés les sous-espaces caractéristiques de u .

- Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i) \subset N_{\lambda_i}$.
- Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, N_{λ_i} est stable par u .
- Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est un polynôme annulateur de $u|_{N_{\lambda_i}}$.
- En déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, le polynôme minimal de $u|_{N_{\lambda_i}}$ est de la forme $(X - \lambda_i)^{\gamma_i}$ avec $\gamma_i \leq \alpha_i$ puis que le polynôme caractéristique de $u|_{N_{\lambda_i}}$ est de la forme $(-1)^{\delta_i} (X - \lambda_i)^{\delta_i}$ avec $\delta_i \geq \gamma_i$.
- Montrer que $E = N_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus N_{\lambda_p}$.
- En déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\delta_i = \alpha_i$ et déterminer la dimension de N_{λ_i} .
- Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de N_{λ_i} telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u|_{N_{\lambda_i}}) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K})$$

soit triangulaire supérieure.

(h) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & \ddots \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix}}_{\alpha_1} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_p & * \\ \mathbf{0} & \ddots \\ & & \lambda_p \end{bmatrix}}_{\alpha_p} \end{bmatrix}.$$

On rappelle qu'un endomorphisme $n \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$) est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $N^k = 0_m$ où 0_m est la matrice carrée nulle de taille m). Le plus petit entier k_0 tel que $n^{k_0} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est dit *indice de nilpotence* de n .

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un endomorphisme d diagonalisable et un endomorphisme n nilpotent tels que :

$$u = d + n \quad \text{et} \quad d \circ n = n \circ d. \quad (1)$$

4. En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, il existe une matrice D diagonalisable et une matrice N nilpotente telles que

$$A = D + N \quad \text{et} \quad DN = ND.$$

Nous allons dans la suite montrer que la décomposition (1) est unique.

5. Soit d et n obtenus à la question 3. Supposons l'existence de d' diagonalisable et de n' nilpotent tels que : $u = d + n = d' + n'$, $d \circ n = n \circ d$ et $d' \circ n' = n' \circ d'$.

(a) Montrer que d et d' commutent avec u .

(b) Soit la décomposition de E en somme directe des sous-espaces caractéristiques de u : $E = N_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus N_{\lambda_p}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit q_i le projecteur sur N_{λ_i} parallèlement à $N_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus N_{\lambda_{i-1}} \oplus N_{\lambda_{i+1}} \oplus \dots \oplus N_{\lambda_p}$: si $x = x_1 + \dots + x_p \in E$ avec pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $x_i \in N_{\lambda_i}$, alors $q_i(x) = x_i$.

Montrer que $d = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_p q_p$.

(c) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, d' laisse stable N_{λ_i} .

(d) Soit $x = x_1 + \dots + x_p \in E$ avec pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $x_i \in N_{\lambda_i}$. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$\begin{cases} q_i \circ d'(x_i) &= d'(x_i) \\ q_i \circ d'(x_j) &= 0 \quad \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(e) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $q_i \circ d' = d' \circ q_i$.

(f) En déduire que d et d' commutent.

Puisque n' commute aussi avec u , la même démonstration montre que d et n' commutent.

(g) Montrer que n et n' commutent.

6. Montrer que $n' - n$ est nilpotent.

7. Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. Notons $\mu_1, \dots, \mu_p$ (resp. $\gamma_1, \dots, \gamma_q$) les valeurs propres de f (resp. g) et $F_1, \dots, F_p$ les sous-espaces propres correspondants (resp. $G_1, \dots, G_q$).

(a) Montrer que chaque G_j est stable par f et que chaque F_i est stable par g .

(b) Pour tous $i \in \{1, \dots, p\}$ et $j \in \{1, \dots, q\}$, soit $H_{ij} = F_i \cap G_j$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $F_i = H_{i1} \oplus \dots \oplus H_{iq}$ et que l'un au moins des $H_{i1}, \dots, H_{iq}$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

(c) En déduire que E est somme directe des H_{ij} et qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres à la fois pour f et g . On dit que cette base est une base de diagonalisation simultanée pour f et g .

(d) Montrer que la somme de deux endomorphismes diagonalisables qui commutent est un endomorphisme diagonalisable.

8. Montrer que $d - d'$ est diagonalisable.

9. En déduire que $n = n'$ et $d = d'$.