

Problème 3 : Temps de passage d'une marche aléatoire

A rendre pour le mardi 24 septembre 2019.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X admet une espérance finie $\mathbb{E}(X) > 0$.

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{R}_+^* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X . On note $(S_k)_{k \geq 0}$ la suite définie par :

$$S_0 = 0 \quad \text{et pour tout } n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objet de ce problème est l'étude du nombre (aléatoire) d'éléments de la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ qui appartiennent à l'intervalle $[a, b]$, défini pour $\omega \in \Omega$ par :

$$N(a, b)(\omega) = \text{Card}\{k \in \mathbb{N}, S_k(\omega) \in [a, b]\},$$

et en particulier son estimation en fonction de la longueur de l'intervalle $[a, b]$.

1. Soient $\ell \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer l'égalité entre évènements : $(N(0, \ell) = n + 1) = (S_n \leq \ell < S_{n+1})$.
- (b) En déduire que : $(S_n \leq \ell) = (N(0, \ell) \geq n + 1)$.
- (c) Montrer que : $(S_n \geq \ell) \subset (N(0, \ell) \leq n + 1)$.

2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} et qui admet une espérance.

- (a) Justifier que, pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(Y \geq k + 1)$.
- (b) Montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k).$$

3. Soient $\ell \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{(S_n \leq \ell)}(\omega) \leq \exp(\ell - S_n(\omega))$ où $\mathbf{1}_{(S_n \leq \ell)}$ est la fonction caractéristique de l'évènement $(S_n \leq \ell)$.
- (b) Montrer que : $\mathbb{P}(S_n \leq \ell) \leq \mathbb{E}(\exp(\ell - S_n))$.
- (c) En déduire que : $\mathbb{P}(S_n \leq \ell) \leq e^\ell (\mathbb{E}(\exp(-X)))^n$.

4. Soit $\ell \geq 0$. On suppose dans cette question que la variable aléatoire $N(0, \ell)$ admet une espérance.

(a) Montrer que $\mathbb{P}(S_n \leq \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(b) Montrer que :

$$\mathbb{E}(N(0, \ell)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k \leq \ell).$$

(c) En déduire que :

$$\mathbb{E}(N(0, \ell)) \leq \frac{e^\ell}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.$$

5. Soient $x \in \mathbb{R}$, $\ell \geq 0$, $k, n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :

$$\mathbb{P}((S_{n-1} < x \leq S_n) \cap (N(x, x+\ell) \geq k)) \leq \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n) \mathbb{P}((X_{n+1} \in [0, \ell]) \cap \dots \cap (X_{n+1} + \dots + X_{n+k-1} \in [0, \ell])).$$

(b) En déduire que :

$$\mathbb{P}((S_{n-1} < x \leq S_n) \cap (N(x, x+\ell) \geq k)) \leq \mathbb{P}(S_{n-1} < x \leq S_n) \mathbb{P}(N(0, \ell) \geq k).$$

6. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \ell \geq 0, \mathbb{E}(N(x, x+\ell)) \leq \frac{e^\ell}{1 - \mathbb{E}(\exp(-X))}.$$