MACS1 - MPI - Devoir sur table d'Algèbre linéaire

Le 4 septembre 2019

Durée de l'épreuve : 1h30.

Le sujet comporte deux pages.

Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour A .
2. Diagonaliser A . En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit la matrice A_m par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & m & m+2 \\ 1 & 1 & m \\ 2 & m+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de A_m selon les valeurs de m .
2. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?
3. Calculer A_0^{-1} .
4. Avec un minimum de calculs, déterminer la solution du système :

$$\begin{cases} x + 2z & = & 2 \\ x + y & = & 3 \\ 2x + y + z & = & 1 \end{cases}.$$

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array}.$$

1. Montrer que l'application u est linéaire.
2. Montrer que l'application u est injective.
3. En déduire que u est bijective.

Exercice 4. Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire M sous la forme $M = I_3 + N$ où $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer N^2 , N^3 puis N^n pour tout $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de M^n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On considère les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -3x_n + 2y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + z_n \end{cases}$$

En utilisant les questions précédentes, donner les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de l'entier n .

Exercice 5. On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans aucun calcul que la matrice A est diagonalisable.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^tXAX = 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.
3. Calculer les valeurs propres de A . En déduire que A est définie positive.
4. Diagonaliser A dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.