

## MACS1 - MPI - Devoir sur table d'Analyse Le 4 septembre 2019

Durée de l'épreuve : 1h30.  
Le sujet comporte deux pages.  
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

### Exercice 1. (Compétences de bases).

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels croissante et majorée. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente dans  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(xu) du.$$

3. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

est convergente.

4. Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  la suite de fonctions de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

(a) Montrer que la fonction  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ , définie pour tout  $x \in [0, +\infty[$  par  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ , est bien définie et continue sur  $[0, +\infty[$ .

(b) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

5. On considère l'équation différentielle définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$(E) \quad xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

On note  $(E_0)$  l'équation homogène associée à  $(E)$ .

(a) Quels sont les points singuliers de  $(E)$  ?

(b) Déterminer deux sous intervalles de  $\mathbb{R}$  sur lesquels  $(E)$  peut être mise sous forme résolue.

(c) Résoudre  $(E_0)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

(d) En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de  $(E)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

(e) En déduire l'ensemble des solutions de  $(E)$  définies sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 2.** 1. Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que, pour tout couple  $(s, u)$  de nombres réels avec  $s \geq u \geq 1$ , on ait

$$|f(s) - f(u)| \leq \frac{C}{u}.$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = f(n^2)$ .

- (a) Démontrer que la série  $\sum_{n \geq 1} (u_{n+1} - u_n)$  est absolument convergente.
- (b) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente. On notera  $L$  sa limite (on ne demande pas de calculer  $L$ ).
- (c) Démontrer que  $f(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} L$ .

2. Soit  $g$  une fonction définie et de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ , telle que  $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

- (a) Démontrer que  $g'$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .
- (b) Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels strictement positifs telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Démontrer, en citant avec soin le théorème utilisé, que

$$\int_0^1 g'(tx_n) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- (c) En déduire que  $\frac{g(x_n)}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- (d) En déduire que  $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

3. Soit  $h$  une fonction définie et de classe  $C^1$  sur  $[0, +\infty[$ . on suppose que  $h'$  possède une limite finie  $L$  en  $+\infty$ . Démontrer, en considérant la fonction  $x \mapsto h(x) - Lx$ , que  $\frac{h(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$ .