Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS
Année universitaire 2019-2020

Examen - MPI

Le 11 octobre 2019

Durée de l'épreuve : 3h.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. Dans cet exercice, on souhaite calculer l'intégrale de Gauss à l'aide des intégrales à paramètres.

1. Montrer que :
$$\forall x \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

2. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

   Dans toute la suite, on pose, pour $x \geq 0$,
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

4. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

5. Montrer que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :
$$\forall x > 0,\ F'(x) = -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\mathrm{d}t.$$

6. Montrer que :
$$\forall x > 0,\ F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F'(x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}$.

8. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty} F'(x)\mathrm{d}x = -\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right).$$

9. À l'aide du changement de variables $u^2 = x$, montrer que :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

10. Déduire des questions précédentes que :
$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2. Dans toute la suite, I_4 désigne la matrice identité de taille 4. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, est égal à $(X-1)(X-2)^3$.

2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_1 = \text{Ker } (A - I_4)$, associé à la valeur propre 1.

3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_2 = \text{Ker } (A - 2I_4)^3$, associé à la valeur propre 2.

4. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

5. On pose $D = P\text{diag}(1,2,2,2)P^{-1}$ où $\text{diag}(1,2,2,2) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont 1, 2, 2 et 2. On pose aussi $N = A - D$.

   Montrer que D est diagonalisable, que N est nilpotente et que N et D commutent.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

7. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= x_n \\ y_{n+1} &= -x_n + 4y_n + z_n - 2t_n \\ z_{n+1} &= 2x_n + y_n + 2z_n - t_n \\ t_{n+1} &= x_n + 2y_n + z_n \end{cases}$$

   Donner les expressions de x_n, y_n, z_n et t_n en fonction de l'entier n.

8. On pose $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

   (a) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer e^A.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(E) \quad |x(x-1)|y' + y = x^2.$$

On note (E_0) l'équation homogène associée à (E).

1. Quels sont les points singuliers de (E) ?

2. Résoudre (E_0) sur chacun des intervalles :

   (a) $I_1 =]-\infty, 0[$;
   (b) $I_2 =]0, 1[$;
   (c) $I_3 =]1, +\infty[$.

3. En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière de (E) sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3.

4. Résoudre (E) sur chacun des intervalles I_1, I_2 et I_3.

5. Résoudre (E) sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

6. Existe-t-il une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier?