Université Paris 13, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS
Année universitaire 2019-2020

Examen - MPI

Le 6 novembre 2019

Durée de l'épreuve : 3h.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

   On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et calculer cette limite. En déduire la limite de f en $-\infty$.

   Indication : on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
5. (a) Soit $a > 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.

   (b) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que
   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$
6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$,
   $$f'(x) \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

   (b) Justifier que la fonction f' admet une limite à droite en 0, cette limite appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

   (c) Montrer que :
   $$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

   (d) En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2. Dans toute la suite, I_3 désigne la matrice identité de taille 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, est égal à $-(X-1)^2(X+2)$.

2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_2 = \text{Ker}\,(A + 2I_4)$, associé à la valeur propre 2.

3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_1 = \text{Ker}\,(A - I_4)^2$, associé à la valeur propre 1.

4. Soit la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

5. On pose $D = P\text{diag}(-2, 1, 1)P^{-1}$ où $\text{diag}(-2, 1, 1) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont -2, 1 et 1. On pose aussi $N = A - D$.

   Montrer que D est diagonalisable, que N est nilpotente et que N et D commutent.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

7. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} & = & 2y_n \\ y_{n+1} & = & x_n + y_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 2x_n - z_n \end{cases}$$
Donner les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n.

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle suivante définie sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la méthode de la variation de la constante :
$$y' + y = \cos(t)\mathrm{e}^{-t}.$$

Exercice 4. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation différentielle (E) suivante, définie sur $\mathbb{R}$:
$$t(t-1)y'(t) + y(t) = 2t^2 + 1.$$
On notera (E_0) l'équation homogène associée.

1. Quels sont les points singuliers de (E) ?

2. Déterminer trois sous intervalles de I, que l'on notera I_1, I_2 et I_3, sur lesquels (E) peut être mise sous forme résolue.

3. Sur chacun de ces sous-intervalles, résoudre l'équation homogène (E_0). (On pourra utiliser l'égalité $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$.)

4. On cherche une solution particulière φ de (E) sous la forme d'une fonction polynomiale dont on note d le degré.

   (a) Quel est, en fonction de d, le degré de l'expression $t(t-1)\varphi'(t) + \varphi(t)$?

   (b) En déduire la valeur de d.

   (c) Déterminer la fonction polynomiale φ cherchée.

   (d) Sur quel intervalle φ est-elle solution de (E) ?

5. À l'aide de raccordements :

   (a) déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) définies sur $]-\infty, 1[$.

   (b) déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) définies sur $]0, +\infty[$.

   (c) déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) définies sur $\mathbb{R}$.

6. Donner l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$.