

Feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral

Exercice 1 Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $ne^{-n|x|} \leq g(x)$?

Exercice 2 Établir que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 3 1. Montrer que, pour tout $u \in [0, 1[$, $u + \log(1-u) \leq 0$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Calculer

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp \left[\lambda^3 \log \left(1 - \frac{y^2}{\lambda^3} \right) \right] \varphi \left(\frac{y}{\lambda} \right) dy.$$

Exercice 4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que, dans $\mathbb{R}^d$,

1. $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha < d$.
2. $\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > d$.

Exercice 5 Pour $R > 0$ on note $B_d(R)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^d$. On note $b_d(R)$ son volume:

$$b_d(R) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{B_d(R)} d\lambda_d$$

où λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

1. Que valent $b_1(1)$ et $b_2(1)$?
2. Exprimer $b_d(R)$ en fonction de $b_d(1)$.
3. Pour $d \geq 2$, Déterminer une relation entre $b_d(1)$ et $b_{d-2}(1)$.
4. En déduire la valeur de $b_d(1)$ puis de $b_d(R)$.

Exercice 6 Dans cet exercice, on souhaite calculer l'intégrale de Gauss à l'aide des intégrales à paramètres.

1. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

2. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ est convergente.

Dans toute la suite, on pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

3. Montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

4. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

5. Montrer que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, F'(x) = -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt.$$

6. Montrer que :

$$\forall x > 0, F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

7. Montrer que $\int_0^{+\infty} F'(x) dx = -\frac{\pi}{2}$.

8. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} F'(x) dx = - \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \right).$$

9. À l'aide du changement de variables $u^2 = x$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

10. Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 7 Soit $a > 0$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-at^2} dt.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = -\frac{x}{2a} F(x).$$

3. En déduire que pour tout réel x , $F(x) = F(0)e^{-\frac{x^2}{4a}}$ puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

Exercice 8 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y) dy \end{array}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 9 Le but de cet exercice est de montrer la proposition suivante (Proposition 3.3.13 du cours):

Proposition 1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit K un compact de Ω et $\mathcal{O}$ un ouvert tel que $K \subset \mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Il existe alors $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur K , $\chi \equiv 0$ sur $\mathcal{O}^c$ et $0 \leq \chi \leq 1$.

$$B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |x - x_0| < R\}$$

$$\overline{B}(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } |x - x_0| \leq R\}.$$

1. Soit $y \in K$. Justifier qu'il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que $B(y, 2\varepsilon_y) \subset \Omega$.
2. En utilisant l'existence d'une fonction pic, montr  e dans le cours, montrer qu'il existe une fonction $\chi_y \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que
 - $\forall x \in \Omega, \chi_y(x) \geq 0$.
 - $\text{supp } \chi_y = \overline{B}(y, \varepsilon_y) \Subset \Omega$.
 - $\forall x \in \overline{B}(y, \varepsilon_y/2), \chi_y(x) \geq 1$.

3. Justifier qu'il existe un sous-ensemble fini K' de K tel que

$$K \subset \bigcup_{y \in K'} B(y, \varepsilon_y/2).$$

4. Soit

$$g(x) = \sum_{y \in K'} \chi_y(x), \quad f(x) = \rho(g(x)),$$

où ρ est une fonction marche, construite dans le cours, C^∞ , croissante, et valant 0 pour sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, \infty[$. Montrer que f vérifie les conclusions de la proposition.