

Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2} dx.$$

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.

- Minorer $|\langle T, \varphi_n \rangle|$.
 - En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.
3. Déterminer le support de T .

Exercice 3 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
- Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

existe.

- Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de $\frac{1}{x}$* et notée $\text{vp}(\frac{1}{x})$.
- En considérant φ_n comme à l'exercice 1, montrer que $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 4

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
- Montrer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right)$$

existent.

3. En déduire que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx$$

définit une distribution T dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire. Donner l'ordre de T .

Exercice 5

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty (\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)) dt.$$

2. Calculer le support de T .

Exercice 6

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L_{\text{loc}}^1(I)$ telle que $T_f = \delta_{x_0}$.

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 7 de la Feuille 1.

Exercice 7 - Distribution d'ordre infini

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur \mathbb{R} , d'ordre infini.

Exercice 8 - Partie finie de x^α

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour $\alpha \in]-2, -1[$, montrer que :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite lorsque ε tend vers 0^+ .

2. On pose : $\langle \text{pf}(x^\alpha), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\text{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 9

Soit u une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ telle que

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, u(tx) = t^{-n} u(x).$$

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|x| \geq \varepsilon} u(x)\varphi(x)dx.$$

Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\int_{|\omega|=1} u(\omega)d\omega = 0. \quad (1)$$

Indication : Passer en coordonnées polaires $(r, \omega) \in]0, +\infty[\times S^{n-1}$ pour $|x| \geq \varepsilon$. Puis utiliser la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.

2. On suppose que la condition (1) est satisfaite. On pose alors, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon(\varphi).$$

Montrer que T définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'ordre au plus 1.

Exercice 10 - Partie finie de $\|x\|^{-a}$

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour $a > 0$, montrer qu'il existe un polynôme en ε , $I(\varepsilon)$, tel que la limite :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\|x\| \geq \varepsilon} \|x\|^{-a} \varphi(x) dx + I(\varepsilon) \right)$$

existe et soit finie.

Indication : on utilisera les coordonnées polaires ainsi que la formule de Taylor à un ordre adéquat.

2. On pose : $\langle \text{pf}(\|x\|^{-a}), \varphi \rangle$ la limite précédente. Montrer que $\text{pf}(\|x\|^{-a})$ est une distribution d'ordre au plus $[a - d] + 1$.