

## Feuille de TD 3 : Distributions - Opérations.

### I. Convergence dans $\mathcal{D}'$

#### Exercice 1

Calculer les limites, dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(nx) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{inx} \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right).$$

#### Exercice 2

On note  $T_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la distribution associée à la fonction localement intégrable  $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$ . Montrer que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vers la distribution  $\delta_0$ . *Indication : on pourra se servir de l'identité  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$*

#### Exercice 3

Montrer que la suite de distributions  $(T_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$\forall n \geq 1, T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre  $m$  est-il toujours  $m$  ?

#### Exercice 4

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On pose :

$$F_N : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} \end{matrix} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

On note  $T_N$  la distribution associée à  $F_N$ .

1. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}}.$$

2. Soit  $M \in \mathbb{N}$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  dont le support est inclus dans  $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$ . Montrer que :

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin \frac{t}{2}} \varphi(t) dt,$$

où, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(t) = \sum_{k=-M}^M \varphi(t + 2k\pi)$ .

3. En écrivant  $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$  où  $\psi$  est de classe  $C^\infty$ , montrer que la suite  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vers la distribution  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$ .

### Exercice 5

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Une série de distributions  $\sum T_n$  est dite convergente dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  lorsque la suite des sommes partielles l'est.

Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres réels.

1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(]0, +\infty[)$ .

2. Montrer que si la série  $\sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  alors la série numérique  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge.

3. On suppose désormais que  $\sum_{n \geq 1} a_n$  converge. On pose pour tout  $N \geq 1$ ,  $A_N = \sum_{n=1}^N a_n$  et  $A_0 = 0$ , de telle manière que  $a_n = A_n - A_{n-1}$  pour tout  $n \geq 1$ .

a. Montrer que si  $\varphi \in \mathcal{D}$  alors la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} A_n \left( \varphi \left( \frac{1}{n} \right) - \varphi \left( \frac{1}{n+1} \right) \right)$$

converge. b. En déduire que  $\sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

### II. Multiplication par une fonction $C^\infty$

#### Exercice 6

Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $fT = 0$ , alors le support de  $T$  est inclus dans l'ensemble  $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}$ .

2. On suppose de plus que  $T$  est d'ordre 0. Montrer qu'alors la réciproque est vraie : si le support de  $T$  est inclus dans l'ensemble  $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}$  alors  $fT = 0$ .

3. En prenant  $T = \delta'$ , montrer que la réciproque est fautive en général si  $T$  n'est pas d'ordre 0.

4. Caractériser les fonctions  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f\delta' = 0$ .

#### Exercice 7

1. Montrer que  $x \text{vp} \left( \frac{1}{x} \right) = 1$ .

2. Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que  $xT = 0$ .

a. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}$  telle que  $\varphi(0) \neq 0$ . Démontrer qu'il existe une constante  $C_\varphi$  telle que, pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}$  égale à 1 sur le support de  $\varphi$ ,  $C_\varphi = \langle T, \phi \rangle$ .

b. Montrer que si,  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont deux fonctions dans  $\mathcal{D}$  telles que  $\varphi(0) \neq 0$  et  $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$ , alors  $C_\varphi = C_{\tilde{\varphi}}$ .

c. En déduire toutes les solutions de l'équation  $xT = 0$ .

3. Résoudre l'équation  $xT = 1$ .

4. Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Montrer que  $(\sin x)T = 0$  si et seulement s'il existe une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de nombres complexes telle que,

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{n\pi}.$$

### III. Dérivation dans $\mathcal{D}'$

#### Exercice 8

Soit  $H$  la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+$ .

1. Montrer que  $H' = \delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $(\log|x|)' = \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
3. Montrer que, dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ,

$$\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)' = \text{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

où, pour toute  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle \text{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right).$$

#### Exercice 9

1. Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Calculer  $(xT)'$ .
2. Résoudre, dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$

#### Exercice 10

Soit  $I = ]a, b[$  et  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $I$ . On se propose de montrer que si  $T \in \mathcal{D}'(I)$  vérifie  $T' + fT = g$  au sens des distributions, alors  $T$  est donnée par une fonction  $C^\infty$  sur  $I$  qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution  $u_0$  de  $u' + fu = g$  qui soit de classe  $C^\infty$  sur  $I$ .
2. Conclure en mettant toute solution de  $T' + fT = g$  sous la forme  $T = u_0 + Se^{-F}$  où  $F$  est une primitive de  $f$  et  $S$  une distribution à déterminer.

#### Exercice 11

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -2 \\ 5 & \text{si } x \in ]-2, 0] \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction  $f$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $T_f$  la distribution associée à  $f$ .
2. Calculer la dérivée de  $T_f$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

#### Exercice 12

Soit  $g \in C^0(I)$ , telle que sa dérivée au sens des distributions  $g'$  vérifie  $g' \in L^1_{\text{loc}}(I)$ . Soient  $a, b \in I$ . Montrer que

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

#### Exercice 13

Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $a \in C^\infty(\Omega)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\partial^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a \cdot \partial^{\alpha-\beta} T.$$

#### Exercice 14

On considère l'opérateur différentiel  $P = \frac{d^2}{dx^2} + a \frac{d}{dx} + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , agissant sur  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  telles que  $Pf = Pg = 0$ ,  $f(0) = g(0)$  et  $f'(0) - g'(0) = 1$ . On considère la fonction  $h$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit enfin  $T$  la distribution définie par,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x) dx.$$

Montrer que  $PT = \delta_0$ , au sens des distributions.

#### Exercice 15

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur  $\mathbb{R}$ , l'équation différentielle :  $2xu' - u = 0$ .
2. Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  une solution de l'équation  $2xT' - T = 0$ . Soit  $T_1$  sa restriction à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$  et soit  $T_2$  sa restriction à  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$ .

a. Calculer  $T_1$  et  $T_2$ .

b. Soit  $S = T - T_1 - T_2$ . Vérifier que le support de  $S$  est inclus dans  $\{0\}$ .

c. Soit  $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  où les  $a_k$  sont dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que :  $2xR' - R = 0 \iff R = 0$ .

d. En déduire les solutions dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de l'équation  $2xT' - T = 0$ .

3. Résoudre, dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

#### Exercice 16

Soit  $h$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $T$  l'application linéaire de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x)) dx.$$

1. Montrer que  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Quel est son ordre ?
2. Déterminer le support de  $T$ .
3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $T$  soit la distribution associée à cette fonction.
4. Calculer, au sens des distributions,  $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$ .